SERIE A

Problemas de MATEMATICAS

I. MARTINEZ PERDIGUERO · A. NEGRO

PROYECTO MT62
ALHAMBRA
non scholae sed vitae discere

PROYECTO

ALHAMBRA

non scholae sed vitae discere

PROYECTO **MT-62** ALHAMBRA

PROYECTO
ALHAMBRA
non scholae sed vitae discere

Problemas de MATEMATICAS

IGNACIO MARTINEZ PERDIGUERO
ADOLFO NEGRO

Alhambra

Primera edición, 1978

EDITORIAL ALHAMBRA, S. A.
R. E. 182
Madrid-1. Claudio Coello, 76

Delegaciones:
Barcelona-8. Enrique Granados, 61
Bilbao-14. Doctor Albiñana, 12
La Coruña. Pasadizo de Pernas, 13
Málaga. La Regente, 5
Oviedo. Avda. del Cristo, 9
Sevilla-12. Reina Mercedes, 35
Valencia-3. Cabillers, 5

México
Editorial Alhambra Mexicana, S. A.
México 6, D.F. Londres, 25-404
Apartado postal 61-275

Rep. Argentina
Editorial Siluetas, S. A.
Buenos Aires-1201. Bartolomé Mitre, 3745/49

Perú
Editia Peruana, S. R. Ltda.
Lima. José Díaz, 208.

n c 25010040

ISBN 84-205-0597-8

Depósito legal: M. 31318 - 1978

Impreso en España - Printed in Spain

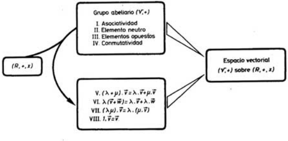
Selecciones Gráficas - Carretera de Irún, km. 11,500 - Madrid (1978)

Indice general

1

Espacios vectoriales

Espacio vectorial



No es necesario que se trate del cuerpo conmutativo de los números reales, $\mathcal{R}$; de modo general, un espacio vectorial puede estar construido sobre cualquier cuerpo conmutativo K, y es útil esta notación: $(\mathcal{V}, +, \underset{K}{\circ})$. A los elementos de $\mathcal{V}$ se los denomina *vectores*, y a los de K, *escalares*.

Consecuencia inmediata es que todo cuerpo conmutativo se puede considerar espacio vectorial sobre sí mismo.

AXIOMAS DE UN ESPACIO VECTORIAL REAL

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{r} \in \mathcal{V} \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathcal{R}$

I.	Asociatividad $\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{r}$	$(\mathcal{V}, +)$ es **grupo abeliano**
II.	Existencia de elemento neutro $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$	
III.	Elementos opuestos $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$	
IV.	Conmutatividad $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$	
V.	$(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\cdot\boldsymbol{v}+\mu\cdot\boldsymbol{v}$	Producto externo $R\times\mathcal{V}$
VI.	$\lambda\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\lambda\cdot\boldsymbol{v}+\lambda\cdot\boldsymbol{w}$	
VII.	$(\lambda\mu)\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{v})$	
VIII.	$1\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$	

Teoremas

Siendo a y b escalares del cuerpo K, en todo espacio vectorial se verifican los siete siguientes teoremas básicos:

1 $a\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}.$	**2** $0\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$	**3** Si $a\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, entonces $a=0$ ó $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$	**4** $(-1)\cdot\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}.$
5 $a\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=a\cdot\boldsymbol{x}-a\cdot\boldsymbol{y}.$	**6** $(a-b)\cdot\boldsymbol{x}=a\cdot\boldsymbol{x}-b\cdot\boldsymbol{x}.$	**7** $(-a)\cdot\boldsymbol{x}=-(a\cdot\boldsymbol{x}).$	

Espacio vectorial producto

Sean $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo conmutativo K. Entonces, en el conjunto producto $\mathcal{V}_1\times\mathcal{V}_2$ se definen las operaciones:

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1)+(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2)=(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2);\ \lambda(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1)=(\lambda\boldsymbol{v}_1, \lambda\boldsymbol{w}_1)$$

$\forall\boldsymbol{v}_i\in\mathcal{V}_1$, $\forall\boldsymbol{w}_i\in\mathcal{V}_2$, $\forall\lambda\in K$, proporcionando al *grupo* $\mathcal{V}_1\times\mathcal{V}_2$ estructura de espacio vectorial sobre K, llamado espacio vectorial producto $\mathcal{V}_1\times\mathcal{V}_2$.

Lo que se acaba de indicar es generalizable a n espacios vectoriales.

Subespacios suplementarios

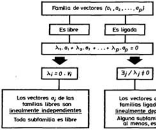
La suma $S=S_1+S_2+\ldots+S_p=\{\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_p/\boldsymbol{a}_i\in S_i\}$, se llama *suma directa*, y se simboliza

$$S=S_1\oplus S_2\oplus\ldots\oplus S_p$$

si cada elemento $\boldsymbol{a} \in S$ se expresa de manera única como suma $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\ldots+\boldsymbol{a}_p$, y en tal caso los subespacios vectoriales S_i se dicen *independientes*.

Dos subespacios vectoriales S y T, respecto de $\mathcal{V}$, son suplementarios si $\mathcal{V}=S \oplus T$.

Sistemas libres



Sistema generador de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es una familia de vectores con los que se puede expresar cualquier vector de $\mathcal{V}$, como combinación lineal de ellos.

Si $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ forma un sistema generador del espacio vectorial $\mathcal{V}$, y éste contiene r vectores libres $\Rightarrow r \leqslant n$.

Bases. Dimensión

Se llama *base* de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ a cualquier sistema generador de $\mathcal{V}$, que sea además libre. O, si se quiere:

> *Base de un espacio vectorial* es todo conjunto de vectores del espacio que verifican estas dos condiciones:
>
> 1. Los vectores de la base son linealmente independientes.
> 2. Cualquier vector del espacio se puede poner como combinación lineal de los de dicho conjunto.

Todo espacio vectorial de tipo finito posee al menos una base; y si tiene más de una, todas poseen el mismo número de elementos.

> *Dimensión* de un espacio vectorial es el número de vectores que constituyen una cualquiera de sus bases.

A veces, en lugar de dimensión de $\mathcal{V}$, se dice *rango* de $\mathcal{V}$.

Teorema del cambio

$\mathcal{V}$ espacio vectorial finito,

$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)=(\boldsymbol{a}_i)_1^n$ es una base

$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{b}_j)_1^r$ es un sistema libre

Se pueden sustituir r vectores $\boldsymbol{a}_i$ por los $\boldsymbol{b}_j$, y la familia $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{a}_{i,1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i,n-r})$ sigue siendo base.

Teorema de la dimensión

Si S y T son dos subespacios vectoriales de $\mathcal{V} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim S+\dim T=\dim (S+T)+\dim (S \cap T)$$

teniendo en cuenta que la dimensión de un sistema de vectores es la del subespacio vectorial que generan, supuesta finita.

Sistema coordenado

Sea $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ una base del espacio vectorial $\mathcal{V}$.

El *isomorfismo*

$$\mathcal{V} \to K^n=K \times K \times \ldots^{(n}$$

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n \to (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

se llama sistema coordenado de $\mathcal{V}$, definido por la base $(\boldsymbol{a}_i)_1^n$.

A $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ se la denomina n-tupla coordenada de $\boldsymbol{a}$; y al número λ_j, coordenada j-ésima de $\boldsymbol{a}$.

Cambio de base

Véase el problema 1.11.

Homomorfismo entre grupos

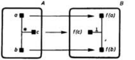
Considérense los grupos $[A, *]$ y $[B, \perp]$.

Establezcamos una aplicación f entre ambos grupos que satisfaga la siguiente propiedad:

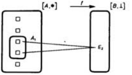
$$\forall a \in A, \quad \forall b \in A, \quad \text{si } a * b=c \Rightarrow f(a) \perp f(b)=f(c)$$

Toda aplicación como la establecida se llama homomorfismo.

"Visualicemos" este importante concepto mediante un diagrama de Venn:



Se establece el homomorfismo $[A, *] \longrightarrow [B, \perp]$; sea ε_2 el neutro de $[B, \perp]$. Se llama núcleo de f al conjunto $A_1 \subset A / \forall x \in A_1,\ f(x)=\varepsilon_2$.



En la bibliografía es usual denotar al núcleo de un homomorfismo f por la expresión "ker(*f*)"*.

Aplicación lineal

Aplicación lineal=homomorfismo entre dos espacios vectoriales.

Entonces,

$$(\mathcal{V}, *, \underset{K}{\circ}) \xrightarrow{f} (\mathcal{W}, \perp, \underset{K}{\#})$$

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{V};\ \forall \lambda \in K,$

1.° $f(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a}) \perp f(\boldsymbol{b})$.
2.° $f(\lambda \circ \boldsymbol{a})=\lambda \# f(\boldsymbol{a})$.

Homomorfismo: $(\mathcal{V}, *, \underset{K}{\circ}) \xrightarrow{f} (\mathcal{W}, \perp, \underset{K}{\#})$.

* Tal notación procede de que en alemán y en inglés "núcleo" se traduce por *Kern* y *Kernel*, respectivamente.

Aplicación f	*Denominación*
No inyectiva } No exhaustiva }	homomorfismo
Inyectiva }	monomorfismo
Exhaustiva }	epimorfismo
Biyectiva.....................	isomorfismo
Endomorfismo=homomorfismo	$\mathcal{V} \to \mathcal{V}$.
Automorfismo=isomorfismo	$\mathcal{V} \to \mathcal{V}$.

Denotaremos por: $\mathfrak{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$=conjunto de las aplicaciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$.

$\mathfrak{L}(\mathcal{V})$=conjunto de endomorfismos de $\mathcal{V}$.

$GL(\mathcal{V})$=conjunto de automorfismos de $\mathcal{V}$.

Propiedades de las aplicaciones lineales

1. $f(\mathbf{0}_v)=\mathbf{0}_w$.
2. $f(-\boldsymbol{a})=-f(\boldsymbol{a})$.
3. Si S es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$, $f(S)$ lo es de $\mathcal{W}$.
4. Si T es subespacio vectorial de $\mathcal{W}$, $f^{-1}(T)$ lo es de $\mathcal{V}$.
5. Si G es parte generatriz de $\mathcal{V}$, $f(G)$ lo es de $f(\mathcal{V})$.
6. Si A es familia ligada en $\mathcal{V}$, $f(A)$ es ligada en $\mathcal{W}$.
7. Si $f(A)$ es sistema libre en $\mathcal{W}$, A es familia libre en $\mathcal{V}$.
8. La aplicación compuesta de dos aplicaciones lineales es aplicación lineal.

Imagen de la aplicación lineal, denotada $Im\,f$, es el conjunto de todos los vectores de $\mathcal{W}$, que son imágenes de vectores de $\mathcal{V}$.

Rango de la aplicación lineal $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es $r(f)=\dim Im\,f=\dim f(\mathcal{V})$.

Núcleo de la aplicación lineal —*ker f*— es el núcleo del homomorfismo de sus grupos abelianos; esto es, el conjunto de elementos de $\mathcal{V}$ que tienen como imagen $\mathbf{0}_w$, o lo que es lo mismo, el subespacio vectorial $f^{-1}(\mathbf{0}_w)$.

Consecuencias

1) El conjunto de vectores de $\mathcal{V}$ que tienen la misma imagen $f(\boldsymbol{a})$ que uno $\boldsymbol{a}$ dado, es la clase $[\boldsymbol{a}]=f^{-1}\{f(\boldsymbol{a})\}=\boldsymbol{a}+\ker f$.

2) f es monomorfismo $\Leftrightarrow \ker f=\{\mathbf{0}_v\}$; esto es, $\dim \mathcal{V}=\dim f(\mathcal{V})$.

3) f es epimorfismo $\Leftrightarrow r(f)=\dim \mathcal{W}$, es decir, $Im\,f=\mathcal{W}$.

4) Si f es isomorfismo $\Rightarrow f^{-1}$ también lo es. O lo que es lo mismo, $\dim \mathcal{V}=\dim \mathcal{W}$ y $\ker f=\{\mathbf{0}_v\}$.

Descomposición canónica

Sea f una aplicación lineal entre los espacios vectoriales $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{W}$. Se puede poner:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & W \\ V/_{\ker f} \arrow[r, "\bar{f}"'] & f(V) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Es decir: $f = i \circ \bar{f} \circ p$

donde: p=epimorfismo; $\bar{f}$=isomorfismo; i=inclusión, monomorfismo.

Teorema de isomorfía de espacios vectoriales

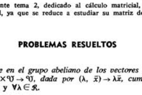
$f: \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$, se tiene: $r(f) = \dim \mathfrak{V} - \dim \ker f$.

NOTA. En el siguiente tema 2, dedicado al cálculo matricial, se trata la ecuación de una aplicación lineal, ya que se reduce a estudiar su matriz de transformación.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1. *Pruébese que en el grupo abeliano de los vectores libres del plano, la operación externa* $\mathfrak{R} \times \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$, *dada por* $(\lambda, \bar{x}) \to \lambda\bar{x}$, *cumple que* $\lambda(\bar{x}+\bar{y}) = \lambda\bar{x}+\lambda\bar{y}$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{V}$ y $\forall \lambda \in \mathfrak{R}$.

Obsérvese la figura



$$\overrightarrow{AB} \in \bar{x}, \quad \overrightarrow{BC} \in \bar{y}, \quad \overrightarrow{AC} \in \bar{x}+\bar{y}$$

Si se eligen $\overrightarrow{AB'} \in \lambda\bar{x}$, $\overrightarrow{AC'} \in \lambda(\bar{x}+\bar{y})$, resultará que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes (más que semejantes, son homotéticos) de razón λ, y en consecuencia, $\overrightarrow{B'C'} \in \lambda\bar{y}$, ya que $\overrightarrow{BC} \in \bar{y}$.

Puesto que $\{\overrightarrow{AB'}\} + \{\overrightarrow{BC'}\} = \{\overrightarrow{AC'}\}$, resultará

$$\lambda\bar{x}+\lambda\bar{y} = \lambda(\bar{x}+\bar{y}), \quad \text{c.q.d.}$$

1.2. *Compruébense los teoremas 5 y 7 del espacio vectorial.*

Teorema 5. $\lambda(x-y)+\lambda y = \lambda[(x-y)+y] = \lambda(x+0) = \lambda x$.

Teorema 7. $\lambda(-x)=\lambda(0-x)=\lambda 0-\lambda x=0-\lambda x=-\lambda x.$
$(-\lambda)x=(0-\lambda)x=0x-\lambda x=0-\lambda x=-\lambda x.$

1.3. *Demuéstrese que el grupo $\mathcal{V}_1\times\mathcal{V}_2$, donde $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ son espacios vectoriales sobre K, es espacio vectorial sobre K, con las operaciones*

$$(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2) \qquad [1]$$

$$\lambda(a_1, b_1)=(\lambda a_1, \lambda b_1) \qquad [2]$$

Como $\mathcal{V}_1$ y ${}_2\mathcal{V}$ son espacios vectoriales $\Rightarrow$ $(\mathcal{V}_1, +)$ y $(\mathcal{V}_2, +)$ son grupos abelianos, luego: $a_1+a_2=a_2+a_1$; $b_1+b_2=b_2+b_1$. Así, pues, bastará probar que se cumplen las propiedades de la ley externa:

1.° $\lambda[(a_1, b_1)+(a_2, b_2)]=\lambda(a_1+a_2, b_1+b_2)$, por [1].
$=[\lambda(a_1+a_2), \lambda(b_1+b_2)]$, por [2].
$=(\lambda a_1+\lambda a_2, \lambda b_1+\lambda b_2)$, $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ son e.v.
$=(\lambda a_1, \lambda b_1)+(\lambda a_2, \lambda b_2)$, por [1].
$=\lambda(a_1, b_1)+\lambda(a_2, b_2)$, por [2].

Análogamente, y por las mismas razones:

2.° $(\lambda+\mu)(a_1, b_1)=[(\lambda+\mu)a_1, (\lambda+\mu)b_1]=(\lambda a_1+\mu a_1, \lambda b_1+\mu b_1)=$
$=(\lambda a_1, \lambda b_1)+(\mu a_1, \mu b_1)=\lambda(a_1, b_1)+\mu(a_1, b_1).$

3.° $(\lambda\mu)(a_1, b_1)=(\lambda\mu a_1, \lambda\mu b_1)=\lambda(\mu a_1, \mu b_1)=\lambda[\mu(a_1, b_1)].$

4.° $1\cdot(a_1, b_1)=(1\cdot a_1, 1\cdot b_1)=(a_1, b_1).$

1.4. *Justifíquese que la suma $S+T$ y la intersección $S\cap T$ de subespacios vectoriales de uno dado $\mathcal{V}$, son, a su vez, subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$.*

Suma

Sean $x, y\in S+T \Rightarrow x=a_1+b_1$; $a_2+b_2=y/a_i\in S$ y $b_i\in T$.
Entonces: $x-y=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\in S+T$, ya que $a_1-a_2\in S$ y $b_1-b_2\in T$, por ser S y T subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$.
$\lambda x=\lambda(a_1+b_1)=(a_1, b_1\in\mathcal{V}=$espacio vectorial sobre $K)=\lambda a_1+\lambda b_1\in S+T$, pues $\lambda a_1\in S$ y $\lambda b_1\in T$, por la misma razón anterior.

Intersección

Sean $x, y\in S\cap T \Rightarrow x$ e y están simultáneamente en S y en T $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists -y/x-y\in S\cap T$, pues $-y$ lo está en S y en T, y ambos son subespacios vectoriales.
Sea $\lambda\in K$, si $x\in S\cap T\Rightarrow x\in S$ y $x\in T\Rightarrow \lambda x\in S$ y $\lambda x\in T\Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda x\in S\cap T$.

1.5. *Se consideran los siguientes espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales, y los vectores que se indican en cada caso:*
$\mathcal{V}_2=\{$vectores libres del plano$\}$; $u=(1, 2)$; $v=(-2, -3)$; $w=(0, -1)$; $x=(1, -1)$; $y=(2, 3)$.

$C=\{$números complejos$\}$; $\boldsymbol{a}=1+i$; $\boldsymbol{b}=-5-5i$; $\boldsymbol{c}=1-i$; $\boldsymbol{d}=2+3i$.
$P(x)=\{$polinomios en $\mathcal{R}$, con grado $\leqslant 2\}$; $\boldsymbol{p}=2$; $\boldsymbol{q}=(-7+x)$; $\boldsymbol{r}=1-x-x^2$.
Analícese la dependencia o independencia lineal, en cada caso, de los vectores que se indican:

a), $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$; *b*), $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$; *c*), $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$; *d*), $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$; *e*), $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{r}$.

a) Formando la combinación lineal

$$\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\gamma\boldsymbol{w}=\alpha(1,2)+\beta(-2,-3)+\gamma(0,-1)=\boldsymbol{0}$$

se llega a

$$(\alpha-2\beta,\ 2\alpha-3\beta-\gamma)$$

$\begin{matrix}\alpha-2\beta=0\\ 2\alpha-3\beta-\gamma=0\end{matrix} \Rightarrow$ Además de la solución $\alpha=\beta=\gamma=0$, existen infinitas soluciones, por ejemplo, para $\alpha=2 \Rightarrow \beta=\gamma=1$; y también $(4, 2,2)$; $\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$; etcétera. Se concluye que los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son *linealmente dependientes*.

b) $\lambda(1,-1)+\mu(2,3)=(0,0) \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\lambda+2\mu=0\\ -\lambda+3\mu=0\end{matrix}\right. \Rightarrow \lambda=\mu=0$ es solución única. En consecuencia $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son vectores *linealmente independientes* en $\mathcal{V}_2$.

c) Se puede ver inmediatamente que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son *linealmente dependientes*, puesto que $\boldsymbol{b}=-5-5i=-5\cdot(1+i)=-5\cdot\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{b}+5\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

d) $\lambda(1-i)+\mu(2+3i)=(0=0i)$
$\left.\begin{matrix}\lambda+2\mu=0\\ -\lambda+3\mu=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda=\mu=0$ es solución única $\Rightarrow$ los vectores $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ son *linealmente independientes*.

e) $\left.\alpha\cdot 2+\beta\cdot(-7+x)+\gamma\cdot(1-x-x^2)=0 \Rightarrow \begin{matrix}2\alpha-7\beta+\gamma=0\\ \beta-\gamma=0\\ -\gamma=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Solución única $(0,0,0) \Rightarrow \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{r}$ son *linealmente independientes*.

1.6. *Demuéstrese que: $\dim_R R=1$; $\dim_R C=2$ y $\dim_C C=1$, en las que los subíndices indican el cuerpo conmutativo sobre el que se ha construido el espacio vectorial.*

Tanto $(R,+)$ como $(C,+)$ son grupos abelianos.

a) La ley externa $\mathcal{R}_K\times\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ se convierte en el producto normal del reales ($\mathcal{R}_K=\mathcal{R}$, pero tomado como el cuerpo base).

Si $\boldsymbol{a}\in\mathcal{R}-\{0\} \Rightarrow \exists^*\boldsymbol{a}^{-1}\in\mathcal{R}$, y entonces, $\forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}$, $\exists^*\lambda\in\mathcal{R}_K/\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}$, ya que $\lambda=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}^{-1}$. Por tanto, $(\boldsymbol{a})$ es una base de un solo elemento $\Rightarrow \dim_R\mathcal{R}=1$.

b) Análogamente ocurre con los complejos:

Si $\boldsymbol{z}\neq 0_C$, $\forall\boldsymbol{z}\in C$, $\exists^*\alpha\in C_K/\boldsymbol{z}=\alpha\cdot\boldsymbol{z}_0$, pues, al ser C_k cuerpo, $\exists^*\boldsymbol{z}_0^{-1}\in C \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim_C C=1$.

c) En el espacio vectorial $(C, +, \underset{R}{\circ})$ se tendrían como bases:

— $(1, i)$, en notación de pares, $1=(1,0)$ e $i=(0,1)$,
— o cualquier par de números complejos $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, independientes en C, como espacio vectorial sobre $\mathcal{R}$; es decir, que $\boldsymbol{z}_1/\boldsymbol{z}_2\notin\mathcal{R}$.

Entonces se tiene, de modo único,

$$\forall\boldsymbol{z}\in C,\quad \boldsymbol{z}=\alpha_1\cdot\boldsymbol{z}_1+\alpha_2\cdot\boldsymbol{z}_2,\quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{R} \Rightarrow \dim_R C=2$$

1.7. *Sean S y T dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial $\mathcal{V}_3(\mathcal{R})$. S está generado por $\boldsymbol{a}_1=(2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2=(1, -1, 2)$, $\boldsymbol{a}_3=(1, 1, -1)$, y T, por los $\boldsymbol{b}_1=(1, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_2=(0, 1, 1)$. Hállense: dim S, dim T, dim $(S+T)$, dim $(S\cap T)$.*

Nota. Todas las coordenadas de los vectores dados están referidas a una misma base.

Hallar las dimensiones equivale a averiguar cuántos elementos tienen una cualquiera de sus respectivas bases.

a) Supóngase $\boldsymbol{a}_1=\lambda\boldsymbol{a}_2+\mu\boldsymbol{a}_3 \Rightarrow (2, 0, 1)=\lambda(1, -1, 2)+\mu(1, 1, -1)$.

Entonces, $\left.\begin{array}{l} 2=\lambda+\mu \\ 0=-\lambda+\mu \\ 1=2\lambda-\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=\mu=1$, esto es: $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$. Luego $\boldsymbol{a}_1$ depende de $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, por lo que este sistema generador cumple las mismas funciones que el dado.

Pero $\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0=\lambda_2+\lambda_3 \\ 0=-\lambda_2+\lambda_3 \\ 0=2\lambda_2-\lambda_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_2=0=\lambda_3$

Con lo que el sistema $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ es libre $\Rightarrow$ es base $\Rightarrow$ dim $S=2$.

b) En T ocurre que si $\delta_1\boldsymbol{b}_1+\delta_2\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0} \Rightarrow \delta_1(1, 0, 1)+\delta_2(0, 1, 1)=(0, 0, 0)$, cuya solución $\delta_1=0=\delta_2$ hace que el sistema $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ sea libre $\Rightarrow$ es base $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ dim $T=2$.

c) Un sistema generador de $S+T$ es $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$. Pero ya se ha visto que $\boldsymbol{a}_1\in K(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, luego no entrará a formar parte de la base.

Puesto $\boldsymbol{a}_2$ como combinación lineal de la familia $(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, es elemental calcular

$$\boldsymbol{a}_2=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_3+\frac{5}{3}\boldsymbol{b}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}_2$$

Por consiguiente, tampoco $\boldsymbol{a}_2$ entrará a formar parte de la base. En definitiva, queda por ahora que $(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ es sistema generador de $S+T$. Ahora bien, si $\alpha\cdot\boldsymbol{a}_3+\beta\cdot\boldsymbol{b}_1+\gamma\cdot\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$, es decir,

$$\alpha\cdot(1, 1, -1)+\beta\cdot(1, 0, 1)+\gamma\cdot(0, 1, 1)=(0, 0, 0) \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

entonces $(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ es sistema libre $\Rightarrow$ es base $\Rightarrow$ dim $(S+T)=3$.

d) dim $(S\cap T)$=dim S+dim T−dim $(S+T)=2+2-3=1$.

1.8. *Con los mismos establecimientos del problema anterior, dese una base de $S\cap T$.*

Según lo que precede, la base estará formada por un solo elemento no nulo. Como $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ es base de S y $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ lo es de T, un $\boldsymbol{x}\in S\cap T$ será tal que $\boldsymbol{x}$ esté simultáneamente en S y en T; luego:

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1(1, -1, 2)+\alpha_2(1, 1, -1)=\beta_1(1, 0, 1)+\beta_2(0, 1, 1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_1+\alpha_2=\beta_1 \\ -\alpha_1+\alpha_2=\beta_2 \\ 2\alpha_1-\alpha_2=\beta_1+\beta_2 \end{array}\right.$$

Si se hace $\beta_2=\lambda$, queda $\alpha_1=-3\lambda$; $\alpha_2=-2\lambda$; $\beta_1=-5\lambda$.

Entonces: $\boldsymbol{x}=-3\lambda(1, -1, 2)-2\lambda(1, 1, -1)=\lambda[-3(1, -1, 2)-2(1, 1, -1)] \Rightarrow$ $\Rightarrow \boldsymbol{x}=\lambda(-5, 1, -4)$, con λ cualquiera, que tiene la dirección del vector $(-5, 1, -4)$, que es *base*.

Adviértase que este problema podía haberse hecho sin necesidad de haber calculado en el apartado *c*) del anterior dim $(S+T)$. Calculada, según se acaba de hacer, la $\dim(S \cap T)=1$, la de $S+T$ se hubiera deducido del teorema de la dimensión.

1.9. *También referida al planteamiento del problema 1.7, contéstese esta cuestión: Si $x=(-1,-5,7)$, ¿está en S, en T o en $S \cap T$? Determínense las coordenadas de x en una base del subespacio que proceda.*

Desde luego,

$$\nexists \lambda \in R/(-1,-5,7)=\lambda(-5,1,-4) \Rightarrow x \notin S \cap T$$

Si es de T, debe ocurrir que $(-1,-5,7)=\mu_1(1,0,1)+\mu_2(0,1,1)$; pero esto equivale a: $-1=\mu_1$, $-5=\mu_2$ y $7=\mu_1+\mu_2$, lo cual no es posible $\Rightarrow x \notin T$.

Ahora bien: $(-1,-5,7)=2\cdot(1,-1,2)-3\cdot(1,1,-1)=2a_2-3a_3 \Rightarrow x \in S$; y como (a_2, a_3) es base de $S \Rightarrow x=(2,-3)$.

1.10. *Referido al planteamiento hecho en el problema 1.7, calcúlese un suplementario de T.*

Se ha calculado ya que $\dim T=2$. Llamando Z a un subespacio complementario de T, deberá ser $Z \oplus T=\mathcal{V}_3$; es decir, $Z+T=\mathcal{V}_3$ y $Z \cap T=\mathbf{0}$.

Entonces, como $\dim(S+T)=3=\dim \mathcal{V}_3$ se podría pensar que $Z=S$, pero $S \cap T=\lambda(-5,1,-4) \neq \mathbf{0}$, $\forall \lambda \in \mathcal{R}$; y además, $\dim S=2$, siendo $\dim Z=\dim(Z+T)+\dim(Z \cap T)-\dim T=3+0-2=1$.

Lo que sucede es que Z ha de estar generado por un solo vector, que no esté contenido en T; por ejemplo, el $(1,0,0)$, lo mismo que cualquier elemento de S, que no sea de la dirección del $(-5,1,-4) \in S \cap T$. Así, el a_1, el a_2, el a_3, y muchísimos más.

1.11. *En el espacio vectorial $\mathcal{V}_2$ de los vectores libres del plano se consideran las bases $B_1=\{(1,0),(0,1)\}$ y $B_2=\{(1,2),(-1,1)\}$. Calcúlense las ecuaciones de cambio de base $B_1 \to B_2$.*

Lo que se pretende es hallar las componentes de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$, respecto de B_2:

$$(1,0)=\alpha_1(1,2)+\alpha_2(-1,1)=(\alpha_1-\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 1=\alpha_1-\alpha_2 \\ 0=2\alpha_1+\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=1/3;\ \alpha_2=-2/3$$

Análogamente,

$$(0,1)=\beta_1(1,2)+\beta_2(-1,1)=(\beta_1-\beta_2, 2\beta_1+\beta_2) \Rightarrow \begin{cases} 0=\beta_1-\beta_2 \\ 1=2\beta_1+\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \beta_1=\beta_2=\frac{1}{3}$$

Las ecuaciones del cambio de base son:

$$\begin{cases} a'=\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{3}b \\ b'=-\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}b \end{cases}$$

Así, el vector $(3,5)$, referido a B_1, tiene por expresión, respecto de B_2:

$$\left.\begin{aligned} a'&=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 5=\frac{8}{3} \\ b'&=-\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 5=-\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

1.12. *Demuéstrense las propiedades cuarta, séptima y octava de las aplicaciones lineales.*

a) Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in f^{-1}(T) \Rightarrow \exists \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in T / f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$ y $f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}$, por definición de f. Además, f es lineal, luego:

$$f(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\boldsymbol{y}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} \in T, \text{ por ser } T \text{ subespacio vectorial } \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \in f^{-1}(T)$$

b) Supóngase que $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_p)$ no fuera familia libre. Entonces, si $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda_p \boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0}_v \Rightarrow$ algún $\lambda_j \neq 0$.

Pero $f(\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_p \boldsymbol{a}_p) = f(\boldsymbol{0}_v) = \boldsymbol{0}_w$, y como f es lineal $\Rightarrow f(\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \lambda_p \boldsymbol{a}_p) = \lambda_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \dots + \lambda_p f(\boldsymbol{a}_p) = \boldsymbol{0}_w$, con algún $\lambda_j \neq 0 \Rightarrow$ la familia $[f(\boldsymbol{a}_1), \dots, f(\boldsymbol{a}_p)]$ es ligada, en contra de la hipótesis.

c) Sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ y Z tres espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, y considérense las aplicaciones lineales

$$\mathcal{V} \xrightarrow{f} \mathcal{W} \xrightarrow{g} Z$$

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ y $\forall \lambda \in K$,

a) $(g \circ f)(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \overset{(1)}{=} g[f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})] \overset{(2)}{=} g[f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})] \overset{(3)}{=} g[f(\boldsymbol{x})] + g[f(\boldsymbol{y})] \overset{(4)}{=} \lambda(g \circ f)(\boldsymbol{x}).$
$= (g \circ f)(\boldsymbol{x}) + (g \circ f)(\boldsymbol{y}).$

b) $(g \circ f)(\lambda \boldsymbol{x}) \overset{(1)}{=} g[f(\lambda \boldsymbol{x})] \overset{(2)}{=} g[\lambda f(\boldsymbol{x})] \overset{(3)}{=} \lambda g[f(\boldsymbol{x})] \overset{(4)}{=} \lambda(g \circ f)(\boldsymbol{x}).$

(1) y (4), aplicando la definición de $g \circ f$.
(2) por la linealidad de f.
(3) por la linealidad de g.

1.13. *Justifíquese que es un isomorfismo la correspondencia* $S \times T \xrightarrow{f} S \oplus T = \mathcal{V} / S, T$ *son espacios suplementarios, respecto de* $\mathcal{V}$.

1.° f es aplicación. Al ser S, T subespacios suplementarios de $\mathcal{V}$, la descomposición de un $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ es única: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} / \boldsymbol{a} \in S$ y $\boldsymbol{b} \in T$.

2.° f es biyectiva:

$$\begin{aligned} S \times T &\xrightarrow{f} S \oplus T \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &\longrightarrow f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Como la descomposición de $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ es única $\Rightarrow f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x}$ tiene solución única, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

3.° f es homomorfismo:

$$f[(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2)] = f(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) =$$
$$= (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) = f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) + f(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2).$$
$$f[\lambda(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1)] = f(\lambda \boldsymbol{a}_1, \lambda \boldsymbol{b}_1) = \lambda \boldsymbol{a}_1 + \lambda \boldsymbol{b}_1 = \lambda(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) = \lambda f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1).$$

1.14. *Demuéstrese que el suplementario de un subespacio vectorial no es único.*

Pongamos por caso el espacio vectorial de los vectores libres del plano.

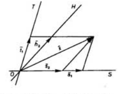
Todo vector libre, x, se puede descomponer en suma de dos componentes, según direcciones distintas, por la regla del paralelogramo.

1) $x = s_1 + t_1 / s_1 \in S$ y $t_1 \in T$

$$S+T=\mathcal{V}; \quad S\cap T=0$$

2) $x = s_2 + h_2 / s_2 \in S$ y $h_2 \in H$

$$S+H=\mathcal{V}; \quad S\cap H=0$$



Por consiguiente,

$$\mathcal{V}=S+T=S+H, \text{ con } H\neq T$$

1.15. *Sea $f\in \mathcal{L}(\mathcal{R}^3)$, dado por* $(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\ f\ } (-x_1+2x_2+x_3, -2x_1+4x_2+2x_3, x_1-2x_2-2x_3)$. *Verifíquese si $f\in GL(\mathcal{R}^3)$. En caso contrario, hállense $Im\, f$ y $ker\, f$.*

Si $x\in \ker f$, con $x=(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow f(x)=0$. Esto es:

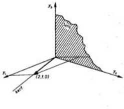
$$\left.\begin{array}{rr} -x_1+2x_2+\ x_3=0 & (1)\\ -2x_1+4x_2+2x_3=0 & (2)\\ x_1-2x_2-2x_3=0 & (3)\end{array}\right\} \Rightarrow (1)+(3):\ -x_3=0 \Rightarrow x_1=2x_2;$$

y haciendo $x_2=\lambda \Rightarrow \ker f=(2,\ 1,\ 0)\neq 0$; luego $f\notin GL(\mathcal{R}^3)$.

Entonces, $dim\, ker\, f=1$. Por tanto, $dim\, Im\, f = dim\, \mathcal{R}^3 - dim\, ker\, f = 3-1=2$.

Para hallar $Im\, f$, desde luego se cumplirá:

$$y\in Im\, f / y=(y_1, y_2, y_3) \quad \left\{\begin{array}{l} y_1=-x_1+2x_2+x_3\\ y_2=-2x_1+4x_2+2x_3\\ y_3=x_1-2x_2-2x_3\end{array}\right.$$



de donde

$$\left.\begin{array}{l} y_1+y_3=-x_3\\ y_2+2y_3=-2x_3\end{array}\right\} \Rightarrow y_2+2y_3=2y_1+2y_3$$

Por consiguiente, $y_2=2y_1$, $\forall y_3$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.16. En el espacio vectorial de los polinomios en x con coeficientes reales y grado menor o igual que 2, dígase si son o no linealmente independientes los vectores

$$x^2-x+1; \quad x^2+3; \quad 2x+4.$$

1.17. Demuéstrese que en el espacio vectorial de los números complejos sobre los reales, los dos vectores

$$1-2i \quad y \quad 3+2i$$

forman una base, y obténganse las componentes del vector $5-i$, respecto de la misma.

1.18. Si los vectores x_1, x_2 y x_3 forman una base de los vectores libres en el espacio, hállense las componentes del vector x_i, $i=1, 2, 3$ en dicha base.

1.19. En el espacio vectorial formado por todos los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, obténganse las componentes del vector

$$1-2x+x^2,$$

respecto de la base constituida por los vectores

$$1+x, \quad 1-x, \quad x^2.$$

1.20. En el espacio vectorial de los números complejos sobre el cuerpo real obténganse las expresiones que permiten pasar de la base B_1 a la B_2, así como a la inversa, siendo $B_1=\{1+i, 2\}$; $B_2=\{2+i, 2-i\}$.

1.21. Dados los subespacios vectoriales $S=\{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$, $T=\{(1, 0, 1), (3, 4, 3)\}$, hállense:

a) Dim S, dim T, dim $(S+T)$, dim $(S\cap T)$.
b) Encuéntrese una base de $S\cap T$.
c) Un suplementario de $S\cap T$.

1.22. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que dos vectores (p, q) y (r, s) de R^2 formen una base del espacio, es que se verifique $p\cdot s-q\cdot r\neq 0$.

1.23. Demuéstrese que en el espacio vectorial de los polinomios en x con coeficientes reales, de grado menor o igual que 2, los polinomios 1, $1+x$, $1+x+x^2$, forman una base, y encuéntrense las componentes, respecto de la misma, de los polinomios 1, x, x^2.

1.24. En el mismo espacio vectorial del ejercicio anterior, se consideran los polinomios que admiten como raíces 1 y 2. Pruébese que todos ellos forman un espacio vectorial de dimensión 3.

1.25. Demuéstrese que es homomorfismo la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathcal{R} \\ (x_1 x_2 \ldots x_n) & \longrightarrow & (x_1, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

1.26. Se considera en R^3 el conjunto de todos los vectores (x, y, z), tales que $2x-3y+z=0$. Demuéstrese que tales vectores forman un espacio vectorial, subespacio de R^3, de dimensión 2, y obténgase una base del mismo.

1.27. En R^3 se considera el conjunto de vectores (x, y, z), definido así:

$$S=\{(x, y, z) \ / \ (2x-y+z=0) \text{ y } (x+y+z=0)\}$$

Demuéstrese que S es un subespacio de R^3, de dimensión 1, y hállese una base del mismo.

1.28. En el espacio vectorial de los polinomios en R, de grado menor o igual que 1, calcúlense las ecuaciones del cambio de base para pasar de la base $\{x, x+2\}$ a la base $\{1+x, 1-x\}$.

1.29. Si

$$P_3=\{\text{polinomios de grado} \leq 3\}$$
$$P_2=\{\text{polinomios de grado} \leq 2\}$$

demuéstrese que la aplicación "derivación" es aplicación lineal entre los espacios vectoriales P_3 y P_2.

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{D} & P_2 \\ a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 & \longrightarrow & 3a_0x^2+2a_1x+a_2 \end{array}$$

1.30. Demuéstrese que $\forall a \in R-\{0\}$, los tres vectores de R^3, $(0, a, a)$, $(a, 0, a)$ y $(a, a, 0)$ son linealmente independientes y que pueden formar base.

1.31. Si representamos por $C[a, b]$={funciones continuas en $[a, b]$}, demuéstrese que la integración de Riemann es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales $C[a, b]$ y $\mathcal{R}$.

$$\begin{aligned} C[a, b] &\xrightarrow{\int_a^b} \mathcal{R} \\ f(x) &\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

1.32. En un espacio vectorial cualquiera V sobre K, la familia (a_1, a_2, a_3) es libre. ¿Cómo son los b_i, dados por $b_1=a_1$

$b_2=a_1+a_2$

$b_3=a_1+a_2+a_3$?

1.33. Sea $C^1[a, b]$={funciones con derivada primera continua en $[a, b]$}. Demuéstrese que la operación "derivación" es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales $C^1[a, b]$ y $C[a, b]$.

1.34. Se consideran los siguientes subconjuntos de las funciones reales, con la operación suma y producto por escalares, definidas en la forma habitual:

$$A=\{f/f(x)=0, \text{ si } x<0\}, \quad B=\{f/f(x)=1, \text{ si } x>0\}, \quad C=\{f/f(-x)=f(x)\}$$

Estúdiense para ver si alcanzan o no estructura de espacio vectorial.

1.35. Demuéstrese que el conjunto de polinomios de grado menor o igual a dos es un espacio vectorial real.

1.36. Demuéstrense las ocho propiedades de las aplicaciones lineales.

1.37. Sea $f\in \mathfrak{L}(R^3)$, dada por $(x_1, x_2, x_3)\to(x_2-x_3, -x_1+4x_3, x_2-x_3)$. Hállense $Im\ f$, $ker\ f$, y una base en $Im\ f$ y otra en $ker\ f$.

1.38. En el espacio vectorial $\mathcal{R}^3$, averígüese cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathcal{R}^3$:

$$A=\{(3x_1, x_2, x_1+x_2)/x_1, x_2\in\mathcal{R}\}$$
$$B=\{(x_1, x_2, x_3)/2x_1+x_3=0\}$$
$$C=\{(x_1, x_2, x_3)/2x_1+x_3=3\}$$

1.39. En una cierta base (a_1, a_2, a_3) de un espacio vectorial $V_3(\mathcal{R})$, el vector x tiene como coordenadas $(1, 2, 3)$. Hállense las nuevas coordenadas de x en la nueva base u_i, $i=1, 2, 3$, dada por $u_1=a_1+a_2$; $u_2=2a_1-a_3$; $u_3=a_2-a_3$.

1.40. Demuéstrese que el conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ es un espacio vectorial real.

1.41. Estúdiese si los números racionales con la adición y multiplicación ordinarias forman un espacio vectorial sobre Q.

1.42. Hállese α para que los vectores $a_1=(\alpha, 1, 1)$; $a_2=(1, \alpha, 1)$; $a_3=(1, 1, \alpha)$ formen familia ligada, y dedúzcase la relación que los liga.

1.43. En $\mathcal{R}^4$ se consideran los subespacios $S=\{a_1, a_2, a_3\}$ y $T=\{b_1, b_2\}$, donde $a_1=(1, 2, 3, 4)$; $a_2=(2, 2, 2, 6)$; $a_3=(0, 2, 4, 4)$; $b_1=(1, 0, -1, 2)$; $b_2=(2, 3, 0, 1)$. Determínense las dimensiones y las bases de los subespacios S, T, $S\cap T$ y $S+T$.

1.44. Si V y W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K (conmutativo), y $f: V\to W$ es lineal, demuéstrese que la aplicación

$$\begin{aligned} V\times W &\xrightarrow{\varphi} V\times W \\ (a, b) &\longrightarrow (a, b-f(a)) \end{aligned}$$

es un automorfismo de $V\times W$.

1.45. Analícese si los números complejos con la adición y multiplicación ordinarias forman un espacio vectorial real.

1.46. Justifíquese si las funciones escalonadas forman espacio vectorial.

1.47. Demuéstrese: La suma $S=S_1+S_2+\ldots+S_p$ es directa $\Leftrightarrow$ la igualdad $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+$ $+\ldots+\boldsymbol{a}_p=\boldsymbol{0}/\boldsymbol{a}_i\in S_i$, implica $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$, $\forall i$.

1.48. Demuéstrese que el núcleo de una aplicación lineal $V\xrightarrow{f}W$, es subespacio vectorial de V.

1.49. En la descomposición canónica de una aplicación lineal (véase pág. 7), pruébese que $\bar{f}$ es isomorfismo y que p es epimorfismo.

1.50. Sean las aplicaciones lineales de los espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo conmutativo K, que se indican:

$$V\xrightarrow{f}W;\qquad W\xrightarrow{g}Z.$$

Demuéstrese:

a) Si f y g son inyectivas $\Rightarrow f\circ g$ es inyectiva.
b) Si $f\circ g$ es inyectiva $\Rightarrow g$ es inyectiva.
c) Si $f\circ g$ es suprayectiva $\Rightarrow f$ es suprayectiva.

1.51. Dado el subconjunto de $\mathfrak{R}^3$, $A=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\}$, con $\boldsymbol{a}_1=(1,1,-1)$; $\boldsymbol{a}_2=(2,2,-2)$; $\boldsymbol{a}_3=(1,3,2)$; $\boldsymbol{a}_4=(4,6,-1)$, se pide:

a) Pruébese que $\boldsymbol{a}_4$ está en la clausura lineal de $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$; y que el $\boldsymbol{a}_2$ lo está en la de $(\boldsymbol{a}_1)$.
b) Hállese una base, con los mismos $\boldsymbol{a}_j$, del subespacio vectorial que generan.
c) Encuéntrese p para que $\boldsymbol{x}=(2,4,p)$ esté en la clausura lineal de $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)$.

1.52. Sea W un espacio de C^3, engendrado por $\boldsymbol{a}_1=(1,0,i)$ y $\boldsymbol{a}_2=(1+i,1,-1)$. Pruébese: *a)*, $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ es base de W; *b)*, $\boldsymbol{b}_1=(1,1,0)$ y $\boldsymbol{b}_2=(1,i,1+i)$ están en W y forman base; *c)*, hállense las coordenadas de los $\boldsymbol{a}_i$, respecto de los $\boldsymbol{b}_j$.

1.53. Sea $h\in\mathfrak{L}[V_3(R)]$, dado por $h(\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{a}_2$; $h(\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{a}_3$; $h(\boldsymbol{a}_3)=\boldsymbol{0}$, donde $(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ es base de $V_3(R)$. Demuéstrese:

1.°, h no es nulo; 2.°, $(h\circ h)=h^2$, tampoco lo es; 3.°, $h^3=(h\circ h\circ h)$ es nulo. Hállense el rango de h y el rango del núcleo.

1.54. Pruébese que la aplicación lineal $\ker f=\{\boldsymbol{0}\}\Leftrightarrow$ es inyectiva. (Sugerencia: toda familia libre de V tiene por imagen una familia libre de W.)

1.55. Demuéstrese que en cualquier espacio real: *a)*, el $\boldsymbol{0}$ es siempre vector ligado; *b)*, $\boldsymbol{x}\in V$ y $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, es siempre libre; *c)*, si $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ es familia ligada $\Rightarrow\exists^*\lambda/\boldsymbol{x}_1=\lambda\boldsymbol{x}_2$ (colineales).

1.56. Justifíquese que, en un espacio vectorial cualquiera, todas las bases tienen el mismo número de elementos.

1.57. Analícese si es o no aplicación lineal la siguiente correspondencia:

$$R\xrightarrow{f}R,\ \text{dada por } f(x)=5x.$$

1.58. Estúdiese si es o no aplicación lineal

$$R^2\xrightarrow{g}R^2,\ \text{dada por } (x_1,x_2)\longrightarrow(x_1+2x_2,\ 3x_1+x_2,\ 2x_1-x_2).$$

1.59. Demuéstrese que $\dim(V\times W)=\dim V+\dim W$.

1.60. En R^4 se consideran los conjuntos $S=\{(x,y,x,z)/x,y,z\in R\}$ y $T=\{(a,b,c,a)/$ $/a,b,c\in R\}$. Demuéstrese:

1.° S y T son subespacios vectoriales.
2.° Hállese una base en cada uno de ellos.
3.° $\operatorname{Dim}(S+T)$.

2

Matrices y determinantes

Espacio vectorial $\mathcal{A}$	Espacio vectorial $\mathcal{B}$
dimensión m	dimensión n
base$=(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_m)$	base$=(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n)$
$\bar{x} \in \mathcal{A}$	$\bar{y} \in \mathcal{B}$
$\bar{x}=x_1\bar{p}_1+x_2\bar{p}_2+\ldots+x_m\bar{p}_m$	$\bar{y}=y_1\bar{q}_1+y_2\bar{q}_2+\ldots+y_n\bar{q}_n$

Aplicación lineal

$$\mathcal{A} \xrightarrow{A} \mathcal{B}$$
$$\bar{x} \longrightarrow \bar{y}=A\bar{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m \end{array}\right\} \qquad [1]$$

Cada posible aplicación lineal $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ queda determinada por el cuadro de coeficientes de las n ecuaciones establecidas, y se llama *matriz* de dimensión $n \times m$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Las igualdades [1] que definen una aplicación lineal en forma matricial se escriben

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

A la matriz A se la llama *operador* de la aplicación lineal.

El elemento de una matriz que ocupa la fila i y la columna j se simboliza a_{ij}, y a la matriz, de forma genérica, $A=(a_{ij})$.

La matriz cero es $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Suma y diferencia de matrices. Sólo si son equidimensionales

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}; \quad A+B=\begin{pmatrix} 3+1 & 0+3 \\ -1-1 & 2+2 \\ 2-2 & -3-4 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 3-1 & 0-3 \\ -1-1 & 2-2 \\ 2+2 & -3+4 \end{pmatrix}$$

Producto del escalar $\lambda \in \mathcal{R}$, por la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \cdot A=\begin{pmatrix} \lambda \cdot 2 & \lambda \cdot (-4) & \lambda \cdot 1 \\ \lambda \cdot 1 & \lambda \cdot 3 & \lambda \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

La matriz opuesta de la $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ es la $-A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Siendo $\mathcal{M}$=matrices $n \times m$ y 1, λ, μ escalares de R,

1. Asociatividad
2. Matriz 0
3. Matrices opuestas
4. Conmutatividad

} $(\mathcal{M}, +)$ es grupo abeliano

5. $\lambda \cdot (A+B)=\lambda A+\lambda B$
6. $(\lambda+\mu) A=\lambda A+\mu A$
7. $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu) A$
8. $1 \cdot A=A$

} ... ...

(1–8) Espacio vectorial de $\mathcal{M}$ sobre R

Producto de matrices: $M_{n\times m} \times M_{m\times p}=M_{n\times p}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_4 & a_1b_2+a_2b_5 & a_1b_3+a_2b_6 \\ a_3b_1+a_4b_4 & a_3b_2+a_4b_5 & a_3b_3+a_4b_6 \end{pmatrix}$$

En general, $A \times B \neq B \times A$.

Para una matriz A de dimensión $n \times m$ hay una $I_{m\times m}$ y otra $I'_{n\times n}$; tales que: $A \times I = A$; $I' \times A = A$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Una matriz $A_{n\times m}$ es cuadrada si $n=m$.

Una matriz cuadrada, $A=(a_{ij})$ es: *simétrica*, si $a_{ij}=a_{ji}$, $\forall i, j$; *hemisimétrica*, si $a_{ij}=-a_{ji}$, $\forall i, j$; *diagonal*, si $a_{ij}=0$, $\forall i \neq j$.

La matriz **traspuesta** de la $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ es la $A'=\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$:

El determinante de la matriz cuadrada $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ es el número $|A|=$ $=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 5 - 4 \times 3 = -2$.

El determinante de la matriz cuadrada $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ es $|B|=\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$ $=(2\times 0\times 5)+(6\times 7\times 4)+(3\times 1\times 8)-(8\times 0\times 4)-(6\times 3\times 5)-(7\times 1\times 2)=88$.

El **menor complementario** α_{23} del término $a_{23}=2$, del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \text{ es } \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -40.$$

El **adjunto** A_{23} del término a_{23} del anterior determinante es $A_{23}=-\alpha_{23}=$ $=-(-40)=40$ porque $2+3$ es impar. En general, $a_{ij} \begin{cases} i+j \text{ par } \rightarrow A_{ij} \text{ positivo} \\ i+j \text{ impar } \rightarrow A_{ij} \text{ negativo} \end{cases}$

Cálculo del valor de un determinante de orden >3: Se toma cualquier fila o columna y se hace $|A|=\Sigma a_{ij} \cdot A_{ij}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-4 \times \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

1) A y A' matrices *traspuestas* $\Rightarrow |A|=|A'|$.

2) Si una línea de un determinante está formada por ceros, el determinante es nulo.

3) Para multiplicar un determinante por un número λ, se multiplica por λ *sólo* una de sus líneas.

4) Suma de determinantes: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m+x & n+y & p+z \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

5) Cambio entre sí de dos filas o dos columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 2 & b & y \\ 3 & c & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & b & y \\ 1 & a & x \\ 3 & c & z \end{vmatrix}$$

6) Dos líneas paralelas *iguales* o *proporcionales* hacen al determinante nulo

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ 2 & 4 & 2 \\ x & y & x \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 5 & 6 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 0$$

7) Si en el determinante $|A|$ se sustituye una línea por ella más cualquier combinación lineal de sus paralelas, su valor no cambia.

8) En un determinante $|A|$, la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de los elementos de una paralela a ella es cero.

La matriz cuadrada A es $\begin{cases} \textit{regular}, & \text{si } |A| \neq 0 \\ \textit{singular}, & \text{si } |A| = 0 \end{cases}$

La matriz *adjunta de la traspuesta de la* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$\text{es la } A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

porque si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Se cumple que:

$$A \times A^* = A^* \times A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz *inversa* de la matriz regular A es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$$

Sucede que:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se cumple que:

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

2.1. *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, *hállese:*

a) $A+B$ *y* $A-B$.
b) $A\times B$ *y* $B\times A$.
c) A', *traspuesta de A.*
d) A^*, *adjunta de la traspuesta de A.*
e) A^{-1} *y* B^{-1}, *inversas de A y B, respectivamente.*
f) *Compruébese que* $(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$.

a)

$$A+B=\begin{pmatrix}2+1&0+0&1+1\\3+1&0+2&0+1\\5+1&1+1&1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&2\\4&2&1\\6&2&1\end{pmatrix};\quad A-B=\begin{pmatrix}2-1&0-0&1-1\\3-1&0-2&0-1\\5-1&1-1&1-0\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&-1\\4&0&1\end{pmatrix}$$

b)

$$A\times B=\begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1&2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1&2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0\\3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1&3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1&3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0\\5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1&5\cdot0+1\cdot2+1\cdot1&5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\3&0&3\\7&3&6\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot3+1\cdot5&1\cdot0+0\cdot0+1\cdot1&1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1\\1\cdot2+2\cdot3+1\cdot5&1\cdot0+2\cdot0+1\cdot1&1\cdot1+2\cdot0+1\cdot1\\1\cdot2+1\cdot3+0\cdot5&1\cdot0+1\cdot0+0\cdot1&1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1&2\\13&1&2\\5&0&1\end{pmatrix}$$

c)

$$A'=\begin{pmatrix}2&3&5\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

d)

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}=0;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3&0\\5&1\end{vmatrix}=-3;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3&0\\5&1\end{vmatrix}=3;$$
$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2&1\\5&1\end{vmatrix}=-3;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&0\\5&1\end{vmatrix}=-2;$$
$$A_{31}=\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}=0;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix}=3;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2&0\\3&0\end{vmatrix}=0$$

$$A^*=\begin{pmatrix}0&1&0\\-3&-3&3\\3&-2&0\end{pmatrix}$$

e) Como $|A|=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{vmatrix}=3 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot A^*=\begin{pmatrix}0&1/3&0\\-1&-1&1\\1&-2/3&0\end{pmatrix}$

Se calcula $B^{*}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad |B|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2$

$$B^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot B^{*}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

f)

$$A\times B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad |A\times B|=-6; \quad (A\times B)^{*}=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 9 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$(A\times B)^{-1}=-\frac{1}{6}\cdot(A\times B)^{*}=\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -2/3 & 1/2 \\ -3/2 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}\times A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -2/3 & 1/2 \\ -3/2 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2.2. *La aplicación lineal f entre los espacios vectoriales V_1 y V_2 se define por las ecuaciones*

$$y_1=x_1-x_2+x_3$$
$$y_2=x_1+2x_2-x_3$$

y la transformación g, que aplica V_2 en V_3, es

$$z_1=y_1+y_2$$
$$z_2=y_1-y_2$$
$$z_3=-y_1$$
$$z_4=y_1+2y_2$$

a) *Hállese la imagen de $\bar{x}=(2,0,1)\in V_1$, en la aplicación f.*
b) *Si $f(\bar{x})=\bar{y}$, determínese $g(\bar{y})$.*
c) *Establézcase el operador de la aplicación φ, producto de f y g.*
d) *Dígase cuál es $\varphi(\bar{x})$.*

a) $f=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad f\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\bar{y}$; $\quad \bar{y}=\begin{pmatrix} 2-0+1 \\ 2+0-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\bar{y}$ es el vector (3, 1).

b) $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad g\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\bar{z}$; $\quad \bar{z}=\begin{pmatrix} 3+2 \\ 3-1 \\ -3+0 \\ 3+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\bar{z}$ es el vector (5, 2, −3, 5).

c) $\varphi=g\times f=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\varphi(\bar{x})=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6+0-1 \\ 0+0+2 \\ -2+0-1 \\ 6+0-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

2.3. *Determínese la aplicación lineal inversa de la f, cuyas ecuaciones son:*

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_3 \\ y_2 &= 3x_1 \\ y_3 &= 5x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

La solución se reduce a hallar la matriz inversa del operador de f:

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que, según se calculó en el apartado *e*) del problema 2.1, es

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, las ecuaciones de la aplicación inversa de la f son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} y_1 \\ x_2 &= -y_1 - y_2 + y_3 \\ x_3 &= y_1 - \frac{2}{3} y_2 \end{aligned}$$

2.4. *Calcúlese el determinante, aplicando las propiedades convenientes*

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Escribiremos f_3 o c_2 para indicar la tercera fila o la segunda columna iniciales en las transformaciones que se efectúen; y f'_3 o c'_2 significarán la tercera fila o la segunda columna transformadas.

$$|A| \xrightarrow[f'_4=f_4-2\cdot f_1]{f'_3=f_3+f_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & -3 & -9 \end{vmatrix} = \xrightarrow[\text{adjuntos de la } c_1]{\text{Desarrollando por}} =$$

$$=1\times\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \\ -6 & -3 & -9 \end{vmatrix} - 0\times\alpha_{21} + 0\times\alpha_{31} - 0\times\alpha_{41} = -108-12-192+24+72+144=-72$$

2.5. Calcúlese el determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

El m.c.m. de los elementos de c_2 es 12. Para conseguir 12 en toda esa columna ha de hacerse: $f_1\times 4$; $f_2\times 3$; $f_3\times 2$; $f_4\times 6$.

Al multiplicar una línea de un determinante por un número, el determinante queda multiplicado por ese número. Para que no cambie su valor, se multiplicará fuera, por el factor correspondiente.

$$|A|=\frac{1}{4\times3\times2\times6}\cdot\begin{vmatrix}8&12&4&-8\\3&12&6&9\\8&12&6&-2\\18&12&24&-12\end{vmatrix}=\xrightarrow[f'_4=f_4-f_1]{f'_2=f_2-f_1;\ f'_3=f_3-f_1}=$$

$$=\frac{1}{144}\cdot\begin{vmatrix}8&12&4&-8\\-5&0&2&17\\0&0&2&6\\10&0&20&-4\end{vmatrix}=\frac{1}{144}\times\left[(-12)\cdot\begin{vmatrix}-5&2&17\\0&2&6\\10&20&-4\end{vmatrix}+0\cdot\alpha_{22}-0\cdot\alpha_{32}+0\cdot\alpha_{42}\right]=$$

$$=-12\cdot(0+0+120-340+600-0)=-5\,040$$

2.6. *Demuéstrese, sin desarrollarlo, que el determinante siguiente es nulo.*

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&b+c\\1&b&c+a\\1&c&b+a\end{vmatrix}=\xrightarrow{c'_3=c_3+c_2}=\begin{vmatrix}1&a&a+b+c\\1&b&a+b+c\\1&c&a+b+c\end{vmatrix}=(a+b+c)\cdot$$

$\cdot\begin{vmatrix}1&a&1\\1&b&1\\1&c&1\end{vmatrix}=(a+b+c)\cdot0=0$, ya que tiene dos columnas iguales.

2.7. *Justifíquese, sin desarrollar, que* $|D|=\dot{\overline{127}}$

$$|D|=\begin{vmatrix}0&1&2&7\\1&0&1&6\\2&5&4&0\\7&1&1&5\end{vmatrix}=\xrightarrow{c'_4=c_4+1\,000\cdot c_1+100\cdot c_2+10\cdot c_3}$$

$$=\begin{vmatrix}0&1&2&127\\1&0&1&1\,016\\2&5&4&2\,540\\7&1&1&7\,115\end{vmatrix}=127\cdot\begin{vmatrix}0&1&2&1\\1&0&1&8\\2&5&4&20\\7&1&1&56\end{vmatrix}=127\cdot k$$

2.8. *Demuéstrese la igualdad que se indica, sin necesidad de desarrollar los determinantes:*

$$\begin{vmatrix}x+y&y+z&z+x\\p+q&q+r&r+p\\a+b&b+c&c+a\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\p&q&r\\a&b&c\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}x+y&y+z&z+x\\p+q&q+r&r+p\\a+b&b+c&c+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&y+z&z+x\\p&q+r&r+p\\a&b+c&c+a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y&y+z&z+x\\q&q+r&r+p\\b&b+c&c+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&y+z&z\\p&q+r&r\\a&b+c&c\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}x&y+z&x\\p&q+r&p\\a&b+c&a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y&y&z+x\\q&q&r+p\\b&b&c+a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y&z&z+x\\q&r&r+p\\b&c&c+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&y&z\\p&q&r\\a&b&c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&z&z\\p&r&r\\a&c&c\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}y&z&z\\q&r&r\\b&c&c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y&z&x\\q&r&p\\b&c&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&y&z\\p&q&r\\a&b&c\end{vmatrix}+(-1)(-1)\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\p&q&r\\a&b&c\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\p&q&r\\a&b&c\end{vmatrix}$$

2.9. Justifíquese la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \cdot \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & abc \\ b^3 & b^2 & abc \\ c^3 & c^2 & abc \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

2.10. Calcúlese:

$$|D| = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 1 & n & n-1 & \dots & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 5 & 4 & 3 \\ \hdotsfor{7} \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 & n \end{vmatrix}$$

$$|D| \xrightarrow{f_1' = f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & n & n-1 & \dots & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 5 & 4 & 3 \\ \hdotsfor{7} \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 & n \end{vmatrix} =$$

$$= \xrightarrow{f_i' = f_i - f_{i-1}} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \hdotsfor{8} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n & 1 \end{vmatrix} = \xrightarrow[(i \geqslant 3)]{f_i' = f_i - f_1} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n & 0 \end{vmatrix} = \xrightarrow[\text{de } c_1]{\text{adjuntos}} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \begin{vmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n & 0 \end{vmatrix}_{(n-1} = \xrightarrow[(1 = a_{1,n-1})]{\text{adjuntos de } c_{n-1}} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{1+n-1} \cdot \begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{vmatrix}_{(n-2} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^n \cdot (-n)^{n-2}$$

2.11. *Sea la aplicación lineal de los espacios vectoriales* $\mathcal{V}_4(\mathcal{R}) \xrightarrow{f} \mathcal{V}_3(\mathcal{R})$ *dada por*

$$\begin{aligned} (1 \; 0 \; 1 \; 0) &\to (1 \; 1 \; 1) \\ (1 \; 0 \; 0 \; 0) &\to (2 \; 1 \; 0) \\ (0 \; 1 \; 0 \; 2) &\to (0 \; 1 \; 0) \\ (1 \; 1 \; 0 \; 0) &\to (0 \; 1 \; 1) \end{aligned}$$

se pide:

1.° *Su ecuación.*
2.° *Una base de* $\ker f$.
3.° *Suponiendo que las bases iniciales en ambos espacios vectoriales fueran las canónicas respectivas* ($\mathbf{u}_k$), *hállese la matriz que define esa aplicación lineal al efectuar el cambio de base, en ambos espacios vectoriales, dada por* $\mathbf{e}_i=\sum_{k=1}^{i}\mathbf{u}_k$.

1.° Consistirá en hallar la matriz que la define. La ecuación es $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ con $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ matrices columnas, que se puede poner: $\mathbf{y}'=\mathbf{x}'\cdot A'$ en matrices filas. En tal caso, A' será 4×3, y poniendo

$$A'=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

resulta que:

$$\left.\begin{array}{l} (1\ 0\ 1\ 0)\cdot A'=(a_1+c_1,\ a_2+c_2,\ a_3+c_3)=(1\ 1\ 1) \\ (1\ 0\ 0\ 0)\cdot A'=(a_1,\ a_2,\ a_3)=(2\ 1\ 0) \Rightarrow a_1=2,\ a_2=1,\ a_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1=-1 \\ c_2=0 \\ c_3=1 \end{array}$$

$$(0\ 1\ 0\ 2)\cdot A'=(b_1+2d_1,\ b_2+2d_2,\ b_3+2d_3)=(0\ 1\ 0)$$
$$(1\ 1\ 0\ 0)\cdot A'=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)=(0\ 1\ 1).$$

De donde:

$$A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \text{luego:}\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\mathbf{x}$$

2.° Tenemos $r(f)=r(A)=\dim \mathcal{V}_4-\dim\ker f \Rightarrow \dim\ker f=4-3=1$, ya que $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, luego $r(A)=3$.

Por tanto, $\ker f$ es un subespacio de *una* dimensión.
Sea $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\in\ker f$, entonces $(x_i)'\cdot A'=(0\ 0\ 0)$, de donde:

$$\begin{array}{l} 2x_1-2x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1 \qquad\quad +\frac{1}{2}x_4=0 \quad\Rightarrow\quad 2x_1=2x_2=-x_3=-x_4 \\ x_2+x_3-\frac{1}{2}x_4=0 \end{array}$$

y haciendo $x_1=\lambda$, resulta que el núcleo es el conjunto de vectores de la forma $\lambda(1\ 1\ -2\ -2)$, esto es, de la dirección del vector $(1\ 1\ -2\ -2)$, *que es base.*

3.° De $e_i=\sum_{k=1}^{i} u_k$, tenemos como *cambio de base* en $\mathcal{V}_4(\mathcal{R})$,

$$\begin{aligned} e_1&=u_1\\ e_2&=u_1+u_2\\ e_3&=u_1+u_2+u_3\\ e_4&=u_1+u_2+u_3+u_4 \end{aligned} \quad \text{es decir:} \begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4 \end{pmatrix}$$

y en forma reducida:

$$(e_i)=P\cdot(u_i)$$

con $i=1, 2, 3, 4$, y P de orden 4×4.
En $\mathcal{V}_3(\mathcal{R})$ será:

$$(e_j)=Q\cdot(u_j)$$

con $j=1, 2, 3$, y Q de orden 3×3 del mismo tipo que P.

VECTOR	COORD. PRIMERA BASE	COORD. SEGUNDA BASE	ECUACION HOMOMORFISMO
X	(x_i)	(x_i^*)	$Y=AX$ (primera base)
Y	(y_j)	(y_j^*)	$Y^*=B\cdot X^*$ (segunda base)

Por lo que:

$$X=\underline{(x_i)'\cdot(u_i)}=(x_i^*)'\cdot(e_i)=\underline{(x_i^*)'\cdot P\cdot(u_i)}$$

análogamente,

$$Y=\underline{(y_j)'\cdot(u_j)}=(y_j^*)'\cdot(e_j)=\underline{(y_j^*)'\cdot Q\cdot(u_j)}$$

De donde: $(x_i)'=(x_i^*)'\cdot P$; $(y_j)'=(y_j^*)'\cdot Q$, que son las ecuaciones matriciales del *cambio de coordenadas*.
Puestas en forma de matrices columna, será:

$$(x_i)=P'\cdot(x_i^*)$$
$$(y_j)=Q'\cdot(y_j^*)$$

Entonces $Y^*=BX^*$ proviene de la $Y=AX$ con dicho cambio, y en definitiva tenemos

$$Q'\cdot(y_j^*)=A\cdot P'\cdot(x_i^*);\quad (y_j^*)=(Q')^{-1}\cdot A\cdot P'\cdot(x_i^*)$$

con lo que $B=(Q')^{-1}\cdot A\cdot P'$, luego:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3/2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

También se pudo hacer este apartado tercero de la siguiente forma:

a) Averiguamos las nuevas coordenadas de los vectores (originales e imágenes) en sus respectivos cambios de base, quedándonos:

$$\begin{array}{lcl}
\text{ANTIGUAS: } (x_i) & \text{NUEVAS: } (x_i^*) & & \text{NUEVAS: } (y_i^*) & \text{ANTIGUAS: } (y_i) \\
(1\ 0\ 1\ 0) \to & (\ \ 1\ -1\ \ \ 1\ \ \ 0) & & (\ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 1) \leftarrow & (1\ 1\ 1) \\
(1\ 0\ 0\ 0) \to & (\ \ 1\ \ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0) & \xrightarrow{f} & (\ \ 1\ \ \ 1\ \ \ 0) \leftarrow & (2\ 1\ 0) \\
(0\ 1\ 0\ 2) \to & (-1\ \ \ 1\ -2\ \ \ 2) & & (-1\ \ \ 1\ \ \ 0) \leftarrow & (0\ 1\ 0) \\
(1\ 1\ 0\ 0) \to & (\ \ 0\ \ \ \ 1\ \ \ 0\ \ \ 0) & & (-1\ \ \ 0\ \ \ 1) \leftarrow & (0\ 1\ 1)
\end{array}$$

b) El problema se reduce a calcular la matriz del homomorfismo *f*, de la misma manera que en el apartado primero del ejercicio.

PROBLEMAS PROPUESTOS

2.12. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ determínense $A+B$ y $A-B$.

2.13. Siendo A y B las matrices del ejercicio anterior, calcúlense $A\times B$ y $B\times A$.

2.14. Calcúlense las matrices adjuntas A^* y B^*, de las que se vienen considerando.

2.15. Establézcanse las matrices inversas A^{-1} y B^{-1}, de las planteadas en 2.12.

2.16. Siendo A y B las matrices de los ejercicios anteriores, compruébese que $(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$.

2.17. En el espacio vectorial V, un automorfismo f es tal que $f(0, 1)=(0, 3)$ y $f(2, 2)=(1, 2)$. Hállese la matriz operador de f.

2.18. La aplicación lineal $f: V\to V'$ tiene de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1&=x_1+x_2+x_3 \\ y_2&=3x_1+x_2-5x_3 \end{aligned}$$

y la $g: V'\to V''$, está definida por

$$\begin{aligned} z_1&=y_1+y_2 \\ z_2&=y_1-2y_2 \\ z_3&=2y_1+y_2 \\ z_4&=y_1 \end{aligned}$$

Siendo $\bar{x}=(4, 0, 1)\in V$, $\bar{y}=f(\bar{x})\in V'$ y $\bar{z}=g(\bar{y})\in V''$, hállense:

a) $f(\bar{x})$,
b) $g(\bar{y})$,
c) matriz de la aplicación producto de las f y g,
d) $(g\circ f)(\bar{x})$.

2.19. Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcúlense A^* y A^{-1}. Luego compruébese que $A\times A^*=A^*\times A=|A|\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.20. Establézcase la aplicación lineal inversa de la definida por:

$$\begin{aligned} y_1&=x_1+x_2 \\ y_2&=x_1+x_3 \\ y_3&=x_2+x_3 \end{aligned}$$

2.21. Calcúlese el valor del determinante $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

2.22. Justifíquese que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \overline{\dot{123}}$.

2.23. Desarróllese el determinante que se propone, dando su valor en forma factorial

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

2.24. Generalícese el procedimiento anterior al desarrollo del determinante de Vandermonde

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & b & c & \dots & y & z \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & y^2 & z^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & y^{n-1} & z^{n-1} \end{vmatrix}$$

2.25. Calcúlese $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}$

2.26. Hállese el valor de $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{vmatrix}$

2.27. Desarróllese $\begin{vmatrix} -1 & x & x & \dots & x \\ x & -1 & x & \dots & x \\ x & x & -1 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & -1 \end{vmatrix}$

2.28. Hállese

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{m-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n+m-1}{1} & \binom{n+m-1}{2} & \dots & \binom{n+m-1}{m-1} \end{vmatrix}$$

2.29. Calcúlese
$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 1 & 4 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

2.30. Hállese
$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

2.31. Calcúlese
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

2.32. Desarróllese
$$\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$$

2.33. Hállese el valor de
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

2.34. Desarróllense
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x_{n-1} \end{vmatrix}$$

2.35. Justifíquese, sin desarrollar, que la ecuación propuesta tiene una solución nula
$$\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.36. Demuéstrese que
$$\begin{vmatrix} x+y & x & x & \dots & x \\ x & x+y & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+y \end{vmatrix} = y^{n-1}\cdot(nx+y)$$

2.37. Hállese el valor de
$$\begin{vmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ 1+i & 0 & 2+3i \\ 1+2i & 2-3i & 0 \end{vmatrix}$$

2.38. Resuélvase la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x+1 \end{vmatrix} = 0$$

2.39. Justifíquese la igualdad que se expresa, sin desarrollar los determinantes

$$\begin{vmatrix} nx_1+y_1 & nx_2+y_2 & nx_3+y_3 \\ ny_1+z_1 & ny_2+z_2 & ny_3+z_3 \\ nz_1+x_1 & nz_2+x_2 & nz_3+x_3 \end{vmatrix} = (n+1\,(n^2-n+1)\cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

2.40. Justifíquese que el determinante de orden n que se escribe tiene el valor que se indica

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)$$

2.41. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, justifíquese que

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|.$$

2.42. Dada la $f: C^3 \to C_3'$, por $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1-x_2+2x_3,\ 2x_1+x_2,\ -x_1-2x_2+2x_3)$, *a*), demuéstrese que $f \in \mathfrak{L}(C^3)$; *b*), hállese $r(f)$; *c*), calcúlese ker f.

2.43. Dado el espacio vectorial formado por los polinomios de grado ≤ 2, de coeficientes reales, hállense las coordenadas de $P=3x^2+2x+5$, respecto a la base $(1+x,\ x+x^2,\ x^2+1)$.

2.44. Sean $(a_i)_1^3$ una base de $V_3(C)$, y

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1+a_3 \\ b_2 &= (1+i)a_1+ia_2+a_3 \\ b_3 &= -ia_1+(1-2i)a_2+a_3 \end{aligned}$$

y h un endomorfismo, tal que

$$h(b_1)=b_1; \quad h(b_2)=0; \quad h(b_3)=ib_3$$

Hállese la matriz de h, respecto de la base (a_1, a_2, a_3).

2.45. Sea $(a_i)_1^3$ una base de $V_3(R)$, y $b_1=a_1+a_3$; $b_2=2a_1+a_2+a_3$; $b_3=-a_1-a_2-a_3$.

Hállese, respecto de la base $(a_i)_1^3$, la matriz del endomorfismo h, tal que $h(b_1)=b_1$; $h(b_2)=b_1+b_2$; $h(b_3)=b_1-b_2$.

2.46. Respecto a una base canónica, el vector x es $x=(3, 2, 1)$. Hállense sus coordenadas respecto de la base $(a_i)_1^3$, siendo $a_1=(1, 0, -1)$; $a_2=(0, 1, 1)$; $a_3=(0, -1, 1)$, respecto de la misma base canónica.

2.47. Dado el vector $x=u_1-u_2+u_3$, respecto a la base $(u_i)_1^3$, hállense sus coordenadas respecto de la base $(v_j)_1^3$, siendo $v_1=u_2+u_3$; $v_2=2u_1+u_3$; $v_3=u_1+2u_2-u_3$.

2.48. Demuéstrese que la aplicación que se indica es isomorfismo:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \to (a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$$

3

Sistemas de ecuaciones lineales

Rango de la matriz A es el orden de la mayor submatriz cuadrada regular de A. O sea, el orden da la más grande submatriz de A, cuyo determinante no sea nulo. (Véase el problema 3.1.)

Sistema de Cramer

Sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, tales que el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

Todo sistema de Cramer es *compatible* (tiene solución) y *determinado* (solución única)

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=c_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=c_n \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad |A|\neq 0$$

El sistema se puede escribir de modo matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

o bien,

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Regla de Cramer

Δ=determinante de la matriz de los coeficientes $\Delta=|A|$

$\left.\begin{matrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{matrix}\right\}$ =determinante que se obtiene al sustituir en Δ los coeficientes de $\left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right\}$

por los términos independientes

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}; \ \ldots; \ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

(Véase el problema 3.4.)

Sistemas de n ecuaciones con m incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=c_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m=c_n \end{array}\right\}$$

Matriz del sistema

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Rango de $A=r$

Matriz orlada con los términos independientes

$$A^c=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & c_n \end{pmatrix}$$

Rango de $A^c=r'$

Teorema de Rouché-Frobenius

$$\left\{\begin{array}{l} r=r' \implies \text{Sistema compatible} \left\{\begin{array}{l} r=r'=m \implies \text{Sistema compatible determinado (solución única).} \\ r=r'<m \implies \text{Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).} \end{array}\right. \\ r\neq r' \implies \text{Sistema incompatible (no tiene solución).} \end{array}\right.$$

Sistemas homogéneos

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m=0 \end{array}\right\}$$

Los sistemas homogéneos siempre admiten la solución $x_1=x_2=\ldots=x_m=0$, llamada solución *trivial*. Para que admitan otras soluciones,

$$r=r'<m \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

(Véase el problema 3.8.)

PROBLEMAS RESUELTOS

3.1. *Determínese el rango de la matriz* $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

Como es de dimensión 3×4, las mayores submatrices cuadradas son de dimensión 3×3, y ninguna es regular porque sus determinantes son nulos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La submatriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, de dimensión 2×2 es regular porque $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por tanto, el rango de A es $r(A)=2$.

3.2. *Determínese el rango de la matriz*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Un procedimiento cómodo para encontrar el rango de una matriz es el que se sigue ahora:

1. Se suprimen las líneas que, a primera vista, se observa que son combinaciones lineales de ellas con sus paralelas. Aquí, $c_3=c_1+c_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Se busca una submatriz de dimensión 2×2, cuyo determinante sea nulo. Si no la hay, $r(A)=1$, salvo que se tratara de la matriz cero; si la hay, el rango es $r(A)\geqslant 2$. Aquí sí existe, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Se orla la submatriz obtenida con las filas y columnas restantes hasta encontrar una 3×3 que sea regular. Si no la hay, $r(A)=2$; si se encuentra, $r(A)\geqslant 3$. Y así se prosigue, sucesivamente.

En nuestro caso,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz propuesta es $r(A)=2$.

3.3. *Los vectores de V_4,*

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (2,\ 1,\ 3,\ 2) \\ \bar{x}_2 &= (3,\ 2,\ 5,\ 1) \\ \bar{x}_3 &= (-1,\ 1,\ 0,\ -7) \\ \bar{x}_4 &= (3,\ -2,\ 1,\ 17) \\ \bar{x}_5 &= (0,\ 1,\ 1,\ -4) \end{aligned}$$

díganse cuántos son linealmente independientes.

El número de vectores independientes coincide con el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

que, como se ha visto en el problema anterior, es $r(A)=2$. Así, pues, de esos cinco vectores sólo hay dos linealmente independientes.

3.4. *Resuélvase el sistema*

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Utilizando la regla de Cramer,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -8;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 21/2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -4; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2/11$$

3.5. *Discútase el sistema que se propone y resuélvase, si procede:*

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 3y &= 4 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A)=2 \\ &\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A^c)=3 \end{aligned}\right\} \quad r(A) \neq r(A^c) \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

No procede su resolución, puesto que no tiene soluciones.

3.6. *Discútase el sistema que se indica y resuélvase, si es posible:*

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+3y=2 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^c=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A)=2; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A^c)=2$$

$$r(A)=r(A^c)=2<3 \text{ (=número de incógnitas)}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \searrow \\ \text{Sistema compatible} & \text{Indeterminado} \end{array}$$

Resolución

$$\left.\begin{array}{r} x+\ y=1-z \\ x+3y=2 \end{array}\right\}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2; \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-3z+1; \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=z+1$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-3z+1}{2}; \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{z+1}{2}$$

En función del parámetro t, las infinitas soluciones son:

$$x=\frac{-3t+1}{2}; \quad y=\frac{t+1}{2}; \quad z=t$$

3.7. *Discútase y resuélvase el sistema*

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+z=2 \\ x+y+z+v=4 \\ x+2v=1 \\ 4x+2y+2z+3v=8 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^c=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

La f_5 de A y de A^c es suma de las cuatro filas anteriores. Así, pues,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^c \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) \geqslant 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A)=4$$

$$r(A)=r(A^c)=4=n \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

El sistema propuesto es equivalente al que resulta de suprimir la ecuación quinta. Así, pues, por la regla de Cramer:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&0&0&2\end{vmatrix}=-3;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\2&0&1&0\\4&1&1&1\\1&0&0&2\end{vmatrix}=1;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&4&1&1\\1&1&0&2\end{vmatrix}=-4$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&0&2&0\\1&1&4&1\\1&0&1&2\end{vmatrix}=-7;\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&2\\1&1&1&4\\1&0&0&1\end{vmatrix}=-2$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-1/3;\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=4/3;\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=7/3;\quad v=\frac{\Delta_4}{\Delta}=2/3$$

3.8. *Resuélvase el sistema homogéneo*

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=0\\x-y=0\\x+3y+2z=0\end{array}\right\}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&3&2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

El sistema dado es equivalente al que resulta de suprimir la tercera ecuación

$$\left.\begin{array}{l}x+y=-z\\x-y=0\end{array}\right\}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}-z&1\\2&-1\end{vmatrix}=z;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&-z\\1&0\end{vmatrix}=z$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-z/2;\quad y=-z/2$$

Las infinitas soluciones del sistema en función del parámetro t son:

$$x=-t/2;\quad y=-t/2;\quad z=t$$

3.9. *Discútase en función de k, y resuélvase en los casos que proceda el sistema*

$$\left.\begin{array}{l}x-y+2z=3\\kx+5y-4z=1\\3x+2y-z=1\end{array}\right\}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\k&5&-4\\3&2&-1\end{vmatrix}=3k-15;\quad A^c=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\k&5&-4&1\\3&2&-1&1\end{pmatrix};\quad \begin{vmatrix}-1&2&3\\5&-4&1\\2&-1&1\end{vmatrix}\neq 0$$

Para $k=5 \Rightarrow r(A)\neq r(A^c) \Rightarrow$ Sistema incompatible.
Para $k\neq 5 \Rightarrow r(A)=r(A^c)=3=n \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$|A|=\Delta=3k-15$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&-1&2\\1&5&-4\\1&2&-1\end{vmatrix}=8;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&3&2\\k&1&-4\\3&1&-1\end{vmatrix}=-k-39;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&3\\k&5&1\\3&2&1\end{vmatrix}=7k-45$$

$$x=\frac{8}{3k-15};\quad y=\frac{-k-39}{3k-15};\quad z=\frac{7k-45}{3k-15},\quad \text{para } k\neq 5$$

3.10. *Determínese k que hace compatible el sistema que sigue, y resuélvase en ese caso:*

$$\left.\begin{array}{r} 2y-\ z=k \\ 3x\qquad -2z=11 \\ y+\ z=6 \\ 2x+\ y-4z=k \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}; \quad A^c=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & k \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A)=3; \quad r(A^c)=3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & k \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & k \end{vmatrix}=0 \Rightarrow k=24$$

Como para $k=24$, $r(A)=r(A^c)=n=3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
Usando la regla de Cramer sobre el sistema equivalente al dado, formado por las tres primeras ecuaciones, se resuelve.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-9; \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 24 & 2 & -1 \\ 11 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-9; \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 0 & 24 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}=-90;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 24 \\ 3 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}=36$$

$$x=1; \quad y=10; \quad z=-4$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

3.11. Determínese el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3.12. Los vectores $\bar{x}_1=(1, 1, 1, 1)$, $\bar{x}_2=(2, 3, -1, 4)$, $\bar{x}_3=(1, 0, 0, 1)$, engendran una variedad lineal cuya dimensión se pide. Sugerencia: el problema es equivalente a hallar el rango de la matriz formada por los componentes de los vectores dato.

3.13. Resuélvanse, usando la regla de Cramer, los sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2\qquad =3 \\ x_2+x_3=4 \\ x_1-x_2-x_3=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y-2z=1 \\ x\qquad -3z=2 \\ y+4z=-1 \end{array}\right\}$$

3.14. Resuélvanse, aplicando la regla de Cramer

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1+x_2+5x_3+x_4=5 \\ 3x_1+6x_2-2x_3+x_4=8 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ x_1+x_2-3x_3-4x_4=-1 \end{array}\right\}$$

3.15. Resuélvase el sistema

$$\begin{aligned} x+y-2z+u+3v&=1\\ 3x+2y-4z-3u-9v&=3\\ 2x-y+2z+2u-6v&=2 \end{aligned}$$

3.16. Analícese la compatibilidad del sistema

$$\begin{aligned} x+y+2z+u&=5\\ 4x+5y+3z&=7\\ 2x+3y-z-2u&=2 \end{aligned}$$

3.17. Resuélvase el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ 2x-y&=0\\ 3y+2z&=0 \end{aligned}$$

3.18. Calcúlese el valor de a, para que el sistema homogéneo que sigue admita otras soluciones que la trivial $(0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} x+ay-z&=0\\ x-2y+z&=0\\ 12x-3y-2z&=0 \end{aligned}$$

3.19. Determínense los valores de a y b que hacen compatible el sistema. Resuélvase:

$$\begin{aligned} x-by+z&=0\\ x+y-z&=0\\ 2x+y+z&=0\\ ax-2y-5z&=0 \end{aligned}$$

3.20. Discútase y resuélvase, en su caso, el sistema

$$\begin{aligned} x_1+3x_2-4x_3+5x_4&=1\\ 3x_1+9x_2-12x_3+15x_4&=0\\ x_1-x_2+x_3-x_4&=2 \end{aligned}$$

3.21. Discútase y resuélvase en los casos de compatibilidad el sistema

$$\begin{aligned} 4x+y-2z+t&=3\\ 3x+3y-z-3t&=1\\ 2x+5y-t&=-1\\ x-2y-z+2t&=2 \end{aligned}$$

3.22. Determínese el valor de k que hace compatible el siguiente sistema. Resuélvase.

$$\begin{aligned} 3x+2y+6z&=0\\ 2x+y+kz&=0\\ x-3y-2z&=0 \end{aligned}$$

3.23. Dado el sistema

$$\begin{aligned} kx+2z&=0\\ ky-z&=k\\ x+3y+z&=5, \end{aligned}$$

hállense los valores de k: 1.º, que hacen el sistema incompatible; 2.º, que hacen el sistema compatible indeterminado.

3.24. Dado el sistema

$$\begin{aligned} (k+2)\,x_1+(k+3)\,x_2&=6\\ (3k+1)\,x_1+3k\,x_2&=4, \end{aligned}$$

determínese k para que la solución de ese sistema lo sea de la ecuación

$x_1-x_2=2$. Escríbase la solución.

3.25. Discútase y resuélvase en los casos de compatibilidad el sistema

$$\begin{aligned}(k-1)^2 x+(k^2-1)\, y&=(k+1)^2\\(2k-1)\, x+(k+1)\, y&=k^2-1\end{aligned}$$

3.26. Hállense los valores de λ y μ que hacen compatible el sistema

$$\begin{aligned}x_1+2x_2&=\lambda\\3x_1-x_2&=\lambda-\mu\\x_1-x_2&=4\end{aligned}$$

3.27. *Determínense las soluciones no triviales del sistema*

$$\begin{aligned}4x-y+2z+t&=0\\2x+3y-z-2t&=0\\2x-11y+7z+8t&=0\\7y-4z-5t&=0\end{aligned}$$

3.28. Sea $A\cdot X=0$ un sistema homogéneo $n\times n$. Se sabe que $r(A)=n-1$. Demuéstrese que un vector no nulo de componentes los adjuntos de una fila de la matriz del sistema es una solución del sistema.

3.29. Resuélvase $A\cdot X=Y$;

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\3&3&1\\3&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

Luego hállese la solución del sistema $A^c\cdot X=Y$.

3.30. Demuéstrese: $[A_{m\times p},\ r(A)=r,\ B_{p\times n},\ r(B)=r',\ A\cdot B=0] \Rightarrow r+r'\leq p$.

3.31. Hállese la dimensión y las ecuaciones implícitas de la variedad lineal afín

$$\begin{aligned}x_1&=-3\lambda_1+6\lambda_2-2\lambda_3-5\lambda_4\\x_2&=-\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+2\lambda_4\\x_3&=2\lambda_1-4\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4\\x_4&=\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4\end{aligned}$$

3.32. Calcúlese el valor de k que hace compatible el siguiente sistema

$$\begin{aligned}3x_1-x_2&=kx_1\\4x_2+3x_3&=kx_3\\5x_1+x_2+2x_3&=kx_2\end{aligned}$$

3.33. Dado el sistema

$$\begin{aligned}x_1-2x_2+x_3&=1\\x_1-3x_2+6x_3&=1\\x_1-x_2-4x_3&=1,\end{aligned}$$

consígase otro equivalente con el menor número de incógnitas posibles.

3.34. Estúdiese el sistema

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=k\\x_1+(1+k)\, x_2+x_3&=2k\\x_1+x_2+(1+k)\, x_3&=0\end{aligned}$$

3.35. Resuélvase:

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=5\\x_1+x_3&=6\\x_2+x_3&=7\\x_1+x_2+2x_3&=13\\2x_1+x_2+x_3&=11\end{aligned}$$

3.36. Discútase el sistema y resuélvase en los casos que proceda:

$$\begin{aligned} x+my+m^2z&=1 \\ nx+my+m^2nz&=m^2n \\ x+my+mnz&=m \end{aligned}$$

3.37. Discusión y resolución de

$$\begin{aligned} 12x_1-(a+2)\,x_2-2x_3&=0 \\ ax_1-2x_2+x_3&=0 \\ x_1+ax_2-ax_3&=0 \end{aligned}$$

3.38. Determínense los valores de p y q que satisfacen la identidad

$$p(4x_1-2x_2)+q(3x_1-3x_2)=0$$

3.39. Calcúlese el valor de k, que hace compatible el sistema que se propone. Luego, resuélvase.

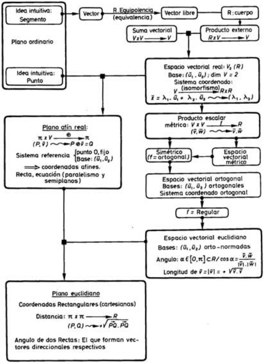
$$\begin{aligned} 2x+y+z&=7 \\ x-y&=k \\ kx+z&=1 \\ x^2+y^2+z^2&=14 \end{aligned}$$

3.40. Discútase y resuélvase, en los casos de compatibilidad, el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x+ky+z&=k+2 \\ x+y+kz&=-2(k+1) \\ kx+y+z&=k \end{aligned}$$

4

El plano



Idea intuitiva: Segmento
Plano ordinario
Idea intuitiva: Punto
Vector
R. Equipolencia (equivalencia)
Vector libre
R: cuerpo
Suma vectorial V x V → V
Producto externo R x V → V
Espacio vectorial real: V₂ (R)
Base: (ū₁, ū₂); dim V = 2
Sistema coordenado:
V (isomorfismo) → R x R
x̄ = λ₁. ū₁ + λ₂. ū₂ ⇝ (λ₁, λ₂)
Plano afín real:
π x V ⊕ → π
(P, v̄) ⇝ P ⊕ v̄ = Q
Sistema referencia {punto O, fijo; Base: (ū₁, ū₂)
⟹ coordenadas afines.
Recta, ecuación (paralelismo y semiplanos)
Producto escalar
métrica: V x V f → R
(v̄, w̄) ⇝ v̄.w̄
Simétrico (f = ortogonal)
Espacio vectorial métrico
Espacio vectorial ortogonal
Bases: (ū₁, ū₂) ortogonales
Sistema coordenado ortogonal
f = Regular
Espacio vectorial euclidiano
Bases: (ū₁, ū₂) orto-normadas
Angulo: α ∈ [0, π] ⊂ R / cos α = v̄.w̄ / |v̄|.|w̄|
Longitud de v̄ = |v̄| = + √(v̄.v̄)
Plano euclidiano
Coordenadas Rectangulares (cartesianas)
Distancia: π x π → R
(P, Q) ⇝ + √(PQ.PQ)
Angulo de dos Rectas: El que forman vectores direccionales respectivos

Plano afín real

Plano afín real es el conjunto de elementos Π, llamados *puntos,* dotados de una operación binaria *externa*

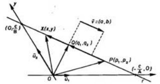
$$\Pi \times V \xrightarrow{\oplus} \Pi$$
$$(P, v) \longrightarrow P \oplus v = Q$$

con dominio de operadores el espacio vectorial de los vectores libres del plano, y que cumple:

Axioma 1. $\forall P \in \Pi,\ \forall v \in V \Rightarrow \exists^* Q \in \Pi / Q = P \oplus v$
Axioma 2. $\forall P \in \Pi,\ \forall v,\ w \in V \Rightarrow (P \oplus v) \oplus w = P \oplus (v + w)$

Coordenadas de un vector, según las afines de sus puntos extremos.
Sistema de referencia: $(O,\ u_1,\ u_2)$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1,\ q_2 - p_2)$$



Recta

Sean $P,\ Q \in r$. Entonces, $X \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} = \alpha \cdot \overrightarrow{PQ}$ $(\alpha \in \mathcal{R})$.

Si v es otro vector direccional de la recta $\Rightarrow \exists \mu \in \mathcal{R} / \overrightarrow{PQ} = \mu \cdot v$, con lo que

$$X \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} = \lambda \cdot v, \quad \text{con } \lambda \in \mathcal{R}$$

Formas afines de la ecuación de una recta

Afín $x = P \oplus \lambda \cdot \vec{v}$, esto es: $(x, y) = (p_1, p_2) \oplus \lambda \cdot (a, b)$				
Vectorial $\vec{OX} = \vec{OP} + \alpha \cdot \vec{PQ}$, $(x, y) = (p_1, p_2) + \alpha \cdot (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$				
Paramétrica	Continua	General	Explícita	Canónica
$x = p_1 + \alpha(q_1 - p_1)$ $y = p_2 + \alpha(q_2 - p_2)$	$\frac{x - p_1}{a} = \frac{y - p_2}{b}$	$Ax + By + C = 0$ donde $\vec{w} = (-B, A) = \lambda \cdot (a, b)$	$y = Mx + N$ con $M = \frac{b}{a} = -\frac{A}{B}$	$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$

Posiciones relativas

Punto-recta

$$P(x_0, y_0),\ r \equiv Ax + By + C = 0 \begin{cases} P \in r, \text{ si } Ax_0 + By_0 + C = 0 \\ P \notin r, \text{ si } Ax_0 + By_0 + C \neq 0 \end{cases}$$

Recta-recta

$$r_1 \equiv A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$r_2 \equiv A_2x+B_2y+C_2=0$$

Vectores direccionales respectivos

$v_1=(-B_1, A_1)$; $v_2=(-B_2, A_2)$ $\qquad M_c=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$; $M_a=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$

Coincidentes

$r_1=r_2$

$v_1=\alpha\cdot v_2$

$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\alpha$

$r(M_c)=1=r(M_a)$

Sistema compatible indeterminado.
Infinitas soluciones.

Paralelas

$r_1 \cap r_2=\varnothing$

$v_1=\alpha\cdot v_2$

$\alpha=\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$

$r(M_c)=1\neq r(M_a)=2$

Sistema incompatible.
No tiene solución.

Secantes

$r_1 \cap r_2=P\in\Pi$

$\nexists\alpha\in\mathcal{R}/v_1=\alpha\cdot v_2$

$\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$

$r(M_c)=2=r(M_a)$

Sistema compatible determinado.
Solución única.

Haz lineal de rectas

1) *Paralelas:* $r_1//r_2 \iff r_1=r_2+\lambda\ (\lambda\in\mathcal{R})$.
2) *Con punto común:*

$$\{\lambda r_1+\mu r_2=0/r_1\neq r_2 \text{ y } \lambda,\mu\in\mathcal{R}\}=$$
$$=\{r_1+\alpha r_2=0/r_1\neq r_2 \text{ y } \alpha\in\mathcal{R}\}$$

Posición relativa de tres rectas

$$r_1\equiv A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$r_2\equiv A_2x+B_2y+C_2=0$$
$$r_3\equiv A_3x+B_3y+C_3=0$$

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

Rango de M
- $r(M)=3 \iff$ Las rectas no pertenecen al mismo haz.
- $r(M)=2 \iff$ Están en un mismo haz, pero no coinciden las tres.
- $r(M)=1 \iff$ Rectas coincidentes.

Segmento

Es una noción propia de estructura de plano o espacio *sobre* un cuerpo totalmente ordenado, ya que implica la existencia del concepto de *intervalo*.
Segmento de extremos P y $Q=\{P \oplus \lambda \cdot PQ / \lambda \in [0, 1]\}$.

Semiplanos

Sea $r \equiv Ax+By+C=0$. Los conjuntos que se indican, llamados *regiones*, son semiplanos de borde r:

$$E=\{P(x, y) \in \Pi / Ax+By+C \geqslant 0; \quad E'=\{P(x, y) \in \Pi / Ax+By+C \leqslant 0\}$$

Es evidente que $E \cup E'=\Pi$; $E \cap E'=r$.

Cambio de coordenadas. (Véase el problema 4.11.)

Producto escalar

Siendo V un espacio vectorial sobre $\mathcal{R}$, se llama *producto escalar* sobre V a una forma bilineal:

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\xrightarrow{f} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

también llamada *métrica*.

1) Si $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, f se denomina *simétrica* u *ortogonal*.
2) Si, además, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}>0$, $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, f se llama *regular*, en cuyo caso,

$$r(f)=\dim V \iff \ker f=\boldsymbol{0}$$

Mientras nada se diga en contrario, trataremos el producto escalar simétrico regular. En tal caso:

Propiedades

$$\left.\begin{array}{lll} 1. & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} & \text{Conmutativa} \\ 2. & (\lambda \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}=\lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})=\boldsymbol{x} \cdot(\lambda \boldsymbol{y}) & \multirow{2}{*}{Lineal} \\ 3. & \boldsymbol{x} \cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}+\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} & \\ 4. & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geqslant 0 \text{ y } \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}=0 \iff \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} & \text{Positiva} \end{array}\right\} \forall \lambda \in \mathcal{R},\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$$

La 2 y 3 pueden sustituirse por: $\boldsymbol{x}(\alpha \boldsymbol{y}+\beta \boldsymbol{z})=\alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})+\beta(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z})$.

Norma o longitud de un vector

$|\boldsymbol{x}|=+\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \implies \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|^2$.

Vectores ortogonales

$\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son ortogonales si $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}=0$.

Vectores ortonormados

Reciben este nombre los ortogonales cuya norma es 1. Es decir.

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0 \ \wedge \ |\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{y}|=1$$

Angulo de dos vectores no nulos

Es el escalar $\alpha \in [0, \pi]/\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}$.

Vectores libres del plano

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|\cdot\cos\widehat{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$$

Consecuencias

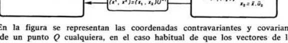
1. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ ortonormales $\Leftrightarrow \widehat{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}=\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.
2. $\boldsymbol{y}=\lambda^2\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \alpha=0 \wedge \boldsymbol{y}=-\lambda^2\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \alpha=\pi$.
3. La proyección ortogonal de $\boldsymbol{y}$ sobre $\boldsymbol{x}$ es $(|\boldsymbol{y}|\cdot\cos\alpha)\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$.
4. $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2-2\cdot|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|\cdot\cos\alpha$ (teorema del coseno).
5. Si $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$, en una base ortonormada $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \Rightarrow x_1=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1;\ x_2=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_3$.

Expresión analítica

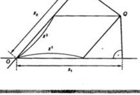
Sean $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2)$, en la base $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ de $V_2(\mathcal{R})$.

Entonces: $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(x_1, x_2)\,U\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ / \ U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ con $u_{ij}=\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j$ $(i, j=1, 2)$.

Coordenadas



En la figura se representan las coordenadas contravariantes y covariantes de un punto Q cualquiera, en el caso habitual de que los vectores de la base, $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$, tengan módulo unidad.



Plano euclidiano

Plano euclidiano es un plano afín real cuyo espacio vectorial es euclidiano. Por consiguiente, mantiene todas las propiedades del plano afín real, añadiéndose el concepto de *distancia*, deducido del producto escalar entre vectores del plano.

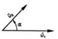
Expresiones analíticas del producto escalar

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\overset{(1)}{=}(x^1,x^2)\,U\begin{pmatrix} y^1\\ y^2\end{pmatrix}\overset{(2)}{=}(x_1,x_2)\,U^{-1}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}=(x_1,x_2)\begin{pmatrix} y^1\\ y^2\end{pmatrix}=(y_1,y_2)\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$$

Base cualquiera

$|\boldsymbol{u}_1|\neq 1\neq|\boldsymbol{u}_2|$.

Matriz fundamental, U (véase producto escalar).

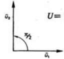


Base ortonormada

$|\boldsymbol{u}_1|=|\boldsymbol{u}_2|=1$.

Matriz fundamental:

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$



Coordenadas

Contravariantes ≠ Covariantes.

Contravariantes = Covariantes.

Distancia entre dos puntos P y Q

$$d(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|=+\sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}}$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=(q_1-p_1,q_2-p_2)\cdot\begin{pmatrix} q^1-p^1\\ q^2-p^2\end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{PQ}|^2=(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2$$

Angulo de dos rectas

$r_1\equiv A_1x+B_1y+C_1=0$; vector direccional $\boldsymbol{v}_1=(-B_1,A_1)$; $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1)$

$r_2\equiv A_2x+B_2y+C_2=0$; vector direccional $\boldsymbol{v}_2=(-B_2,A_2)$; $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2)$

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1|\,|\boldsymbol{v}_2|}$$

En contravariantes, según [1]; en covariantes, según [2].

Tomando los vectores normales:

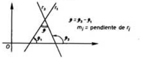
$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}$$

En contravariantes, según [2]; en covariantes, según [1].

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\;\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

O, también:

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$$



Recta perpendicular a otra, pasando por un punto dado

Punto y recta en contravariantes:
$n=(A, B) \perp v=(-B, A) \Rightarrow$
$\Rightarrow n=(\alpha, \beta)=(A, B)\cdot U^{-1}$

$$\frac{x-p^1}{\alpha}=\frac{y-p^2}{\beta}$$

Punto y recta en covariantes:

$n=(A, B) \perp v=(-B, A) \Rightarrow$
$\Rightarrow n=(\alpha', \beta')=(A, B)\cdot U$

$$\frac{x-p_1}{\alpha'}=\frac{y-p_2}{\beta'}$$

$P(p_1, p_2)$; $r\equiv Ax+By+C=0$
$n=(A, B) \perp v=(-B, A)$

$$\frac{x-p_1}{A}=\frac{y-p_2}{B}$$

Si m es pendiente de r, también:

$$y-p_2=-\frac{1}{m}(x-p_2)$$

$s\equiv Bx-Ay+\lambda=0 \Leftrightarrow r \perp s$
Para hallar λ, se hace $P \in s$

Distancia de un punto P a una recta r ($P \notin r$)

$$\left.\begin{matrix} Q \in r \\ n \perp r \end{matrix}\right\} Q, n \text{ cualesquiera} \Rightarrow d(Pr)=\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{n}{|n|}$$

Si la ecuación de la recta viene dada en $\left\{\begin{matrix}\text{contravariantes}\\ \text{covariantes}\end{matrix}\right\}$

$n=(A, B)$ viene dado en $\left\{\begin{matrix}\text{covariantes}\\ \text{contravariantes.}\end{matrix}\right.$

$$d(Pr)=\frac{Ap_1+Bp_2+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas

Para su cálculo, basta escoger un punto cualquiera (y cómodo) de una de ellas, para estar en el caso anterior.

Ecuación normal de la recta

Siendo 0 el origen del sistema de referencia, $P \in r$ y $n=(A, B) \perp r$,

$$\frac{n}{|n|}\cdot(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP})=0$$

con las consideraciones anteriores.

$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\operatorname{sen}\alpha=d$
$d=$distancia al origen.

Area de un triángulo ABC

$$\text{Area}=\frac{1}{2}\,w\cdot\overrightarrow{AC}/w \perp \overrightarrow{AB} \text{ y } |w|=|\overrightarrow{AB}|$$

(Véase el problema 4.27.)

PROBLEMAS RESUELTOS

4.1. *Siendo* x, y *vectores no nulos, pruébese:*
$\lambda x+\mu y=O \Rightarrow \lambda=0=\mu \Leftrightarrow$ *dirección de* $x\neq$ *dirección de* y.

Supóngase $\mu\neq 0 \Rightarrow \mu y=-\lambda x$; luego: $y=(-\lambda\cdot\mu^{-1})\,x$.

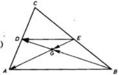
Como $-\lambda\cdot\mu^{-1}=\alpha\in\mathfrak{R} \Rightarrow y=\alpha x \Rightarrow$ dirección $x=$dirección y, contra la hipótesis, de donde $\mu=0$. Sustituyendo, $\lambda x=0 \Rightarrow \lambda=0$.

4.2. *El baricentro de un triángulo dista de cada vértice dos tercios de la longitud de mediana respectiva. Pruébese:*

Según figura, se tiene:

$$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} \text{ (paralela media)}$$

$$\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{BA}$$



Como los puntos A, G y E están alineados $\Rightarrow \overrightarrow{EG}=\alpha\cdot\overrightarrow{GA}$; y los B, G y D, también $\Rightarrow \overrightarrow{GD}=\beta\cdot BG$.

Sustituyendo arriba,

$$\left.\begin{aligned} 2(\alpha\cdot\overrightarrow{GA}+\beta\cdot\overrightarrow{BG})&=\overrightarrow{BA}\\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}&=\overrightarrow{BA}\end{aligned}\right\} \Rightarrow (2\alpha-1)\cdot\overrightarrow{GA}+(2\beta-1)\cdot\overrightarrow{BG}=\mathbf{O}$$

y al ser $\overrightarrow{GA}$ y $\overrightarrow{BG}$ de distintas direcciones $\Rightarrow$ (problema 4.1) que $2\alpha-1=0$ y $2\beta-1=0$, por lo que $\alpha=\dfrac{1}{2}=\beta$. Entonces,

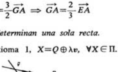
$$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GA}=\alpha\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}=(\alpha+1)\cdot\overrightarrow{GA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{GA} \Rightarrow \overrightarrow{GA}=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{EA}$$

4.3. *Justifíquese que dos puntos distintos determinan una sola recta.*

Sean $P, Q\in\Pi/P\neq Q$. Entonces, según el axioma 1, $X=Q\oplus\lambda v$, $\forall X\in\Pi$. Luego: $P=Q\oplus\lambda_1 v \Rightarrow Q=P\oplus(-\lambda_1 v)$.

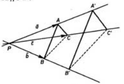
Sustituyendo:

$$X=[P\oplus(-\lambda_1 v)]+\lambda v\overset{(1)}{=}P\oplus(-\lambda_1+\lambda)\,v=P\oplus\alpha v$$



(1) Por el axioma 2.

4.4. *Dadas tres rectas distintas concurrentes en el punto P, y dados los lados $AB//A'B'$, $AC//A'C'$, de dos triángulos ABC y $A'B'C'$, demuéstrese que $CB//C'B'$.*



Por el axioma 1:

$$A = P \oplus \boldsymbol{a}$$
$$B = P \oplus \boldsymbol{b}$$
$$C = P \oplus \boldsymbol{c}$$

Recta $CB = \{C \oplus \lambda \cdot \overrightarrow{CB}\} = \{C \oplus \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})\}$.

Según la figura, $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$; y, por dato, $AC//A'C' : \overrightarrow{A'C'} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \boldsymbol{c} - \alpha \cdot \boldsymbol{a}$.

Entonces, si $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{PC'} - \overrightarrow{PA'} = \beta \cdot \boldsymbol{c} - \gamma \cdot \boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{O} = (\alpha - B) \cdot \boldsymbol{c} - (\alpha - \gamma) \cdot \boldsymbol{a}$.

Y como $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{a}$ son independientes (recuérdese el problema 4.1) $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$.

Análogamente ocurre con el $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{PB'} - \overrightarrow{PA'}$, con lo cual,

$$\left.\begin{array}{l} A' = P \oplus \overrightarrow{PA'} = P \oplus \eta \cdot \boldsymbol{a} \\ B' = P \oplus PB' = P \oplus \eta \cdot \boldsymbol{b} \\ C' = P \oplus PC' = P \oplus \eta \cdot \boldsymbol{c} \end{array}\right\} \text{ recta } C'B' = \{C' \oplus \mu \cdot \overrightarrow{C'B'}\} = \{C' \oplus \mu \cdot (\overrightarrow{PB'} - \overrightarrow{PC'})\} = \\ = \{C' \oplus \mu \cdot (\eta \cdot \boldsymbol{b} - \eta \cdot \boldsymbol{c})\} = \\ = \{C' \oplus \mu \cdot \eta \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})\}, \text{ con } \mu \cdot \eta \in \mathcal{R}$$

$\Rightarrow$ recta $CB//$recta $C'B'$, pues las define el mismo vector $\boldsymbol{b}$-$\boldsymbol{c}$.

4.5. *Dados $P(2, -3)$, $Q(6, 1)$, $R(-2, -4)$, en un plano afín real, se pide:*

a) *Coordenadas del punto S, para que $\overrightarrow{RS}$ sea equipolente a $\overrightarrow{PQ}$.*

b) *Coordenadas de T, para que $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{PQ}$.*

c) *¿En qué razón divide el M(5, 0) al segmento $\overrightarrow{PQ}$?*

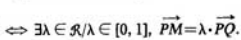
a) $\overrightarrow{RS} \in \{\overrightarrow{PQ}\} \Leftrightarrow (x+2, y+4) = (6-2, 1+3) \Rightarrow S(2, 0)$.

b) $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow (x'-2, y'+3) = \frac{1}{4} \cdot (4, 4)$ con $T'(x', y') \Rightarrow T(3, -2)$.

c) Lo primero ha de averiguarse si $M \in \overrightarrow{PQ}$:

Según la figura, $M \in \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathcal{R} / \lambda \in [0, 1]$, $\overrightarrow{PM} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$.

Entonces, $(5-2, 0+3) = \lambda \cdot (4, 4) \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$.



Se ha comprobado que $M \in \overrightarrow{PQ}$, y, además, queda calculada la razón en que lo divide, que es 3/4.

4.6. *Dados los puntos $P(2, 5)$, $Q(3, 8)$, hállese la ecuación de la recta que definen, en todas sus formas afines.*

El $\overrightarrow{PQ}=(3-2, 8-5)=(1, 3)$ será uno de los vectores direccionales de la recta; y tomando, por ejemplo, el punto P como inicial, se tiene:

Afín: $(x, y)=(2, 5)\oplus\lambda\cdot(1, 3)$.

Vectorial: $(x, y)=(2, 5)+\lambda\cdot(1, 3)$.

Paramétrica: $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=5+3\lambda. \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-5}{3}$.

General: $3x-y-1=0$.

Explícita: $y=3x-1$.

Canónica: $\dfrac{x}{1/3}+\dfrac{y}{-1}=1$.

NOTA. Una forma muy práctica de calcular la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados es la siguiente: el desarrollo de la forma continua $\dfrac{x-p_1}{q_1-p_1}=\dfrac{y-p_2}{q_2-p_2}$ coincide con el desarrollo del determinante $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}=0$.

En nuestro caso, $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow r\equiv 3x-y-1=0$.

4.7. *Dados los puntos $A(4,5)$, $B(2, 0)$ y $C(10, 0)$, se pide:*

a) *Verifíquese que no están alineados.*

b) *Ecuación de la recta que, pasando por C, es paralela a la determinada por A y B.*

c) *Tomando los puntos dados como vértices de un paralelogramo, hallar las coordenadas del cuarto vértice.*

a) Recta $AB\equiv\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y-5}{-5}\equiv 5x-2y-10=0 \Rightarrow 5\cdot10-2\cdot0-10\neq0 \Rightarrow$
$\Rightarrow C\notin r_{AB}$

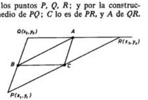
b) Será de la forma $5x-2y-10+\lambda=0$. Si además se le obliga a que contenga al punto $C \Rightarrow 5\cdot10-2\cdot0-10+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-40$. La ecuación pedida es: $5x-2y-50=0$.

c) Las tres posibles soluciones son los puntos P, Q, R; y por la construcción del paralelogramo $\Rightarrow B$ es punto medio de PQ; C lo es de PR, y A de QR. Por consiguiente:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2, \quad \frac{y_1+y_2}{2}=0;$$

$$\frac{x_2+x_3}{2}=4; \quad \frac{y_2+y_3}{2}=5;$$

$$\frac{x_1+x_3}{2}=10; \quad \frac{y_1+y_3}{2}=0$$



luego: $x_1+x_2=4$; $y_1+y_2=0$; $x_2+x_3=8$; $y_2+y_3=10$; $x_1+x_3=20$; $y_1+y_3=0$.

Sumando todas las ecuaciones de las x: $x_1+x_2+x_3=16 \Rightarrow x_3=12$; $x_1=8$; $x_2=-4$.

Análogamente, con las y: $y_1+y_2+y_3=5 \Rightarrow y_3=5$; $y_2=5$; $y_1=-5$.

Los puntos son: $P(8, -5)$; $Q(-4, 5)$ y $R(12, -5)$.
También pudo hacerse de la siguiente forma, por ejemplo, para hallar Q:
Recta, pasando por A y paralela a BC: r_1.
Recta, pasando por B y paralela a AC: r_2.

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \equiv y=5 \\ r_2 \equiv 5x+6y-10=0 \end{array}\right\} \quad Q=r_1 \cap r_2=(-4, 5)$$

Análogamente, para P y R.

4.8. *Sean las rectas* $r_1 \equiv x-2y-3=0$; $r_2 \equiv 3x+y-4=0$; $r_3 \equiv 4x+\lambda-7=0$. *Se pide:*

a) *Valor de* λ, *para que las tres rectas pasen por el mismo punto.*
b) *Valor de* λ, *para que* $r_2 // r_3$.
c) *Suponiendo* $r_1 // r_3$, *¿qué punto es el* $r_2 \cap r_3$?

a) $r_1 \cap r_2 = (11/7, -5/7)$. Este punto ha de estar en $r_3 \Rightarrow \dfrac{44}{7}+\lambda\cdot\left(-\dfrac{5}{7}\right)-7=0 \Rightarrow \lambda=-1$.

b) Vectores direccionales respectivos son: $v_2=(-1, 3)$; $v_3=(-\lambda, 4)$; y para que $r_2 // r_3$, los dos vectores serán tales que $\exists \alpha \in \mathcal{R}$, que cumpla $v_2=\alpha\cdot v_3$ $(-1, 3)=\alpha\cdot(-\lambda, 4) \Rightarrow 1=\alpha\cdot\lambda$; $3=\alpha\cdot 4 \Rightarrow \lambda=4/3$.

c) Si $r_1 // r_3 \Rightarrow (2, 1)=\beta\cdot(-\lambda, 4)$; luego: $2/-\lambda=1/4=\beta \Rightarrow \lambda=-8$.

Será: $P=(3x+y-4=0) \cap (4x-8y-7=0)$, que da: $P\left(\dfrac{39}{28}, \dfrac{-5}{28}\right)$

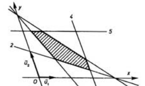
4.9. *Estúdiese la posición relativa de las tres rectas del problema anterior:*

$$\begin{array}{l} r_1 \equiv x-2y-3=0 \\ r_2 \equiv 3x+y-4=0 \\ r_3 \equiv 4x+\lambda y-7=0 \end{array} \qquad M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & \lambda & -7 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & \lambda & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & \lambda+8 & 5 \end{vmatrix} = -5(\lambda+1)$, ocurre que:

1. $\lambda \neq -1 \Rightarrow r(M)=3$, luego las tres rectas se cortan dos a dos en puntos distintos, formando triángulo.
2. $\lambda=-1 \Rightarrow r(M)=2$, y se observa que $r_3=1\cdot r_1+1\cdot r_2$; luego se trata de tres rectas que pasan por un mismo punto: $r_1 \cap r_2=\left(\dfrac{11}{7}, \dfrac{-5}{7}\right)$:

4.10. *Represéntese gráficamente la región del plano limitado por los semiplanos* (1) $3x+2y \geqslant 6$; (2) $x+4y \geqslant 4$; (3) $3x+4y \leqslant 12$; (4) $x \leqslant 3$; (5) $y \leqslant 2$.



Tomando el sistema de referencia de la figura, $(0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, se representan los *bordes* de los semiplanos, y luego se verifica, por ejemplo, dónde se encuentra el $(0, 0)$, en cada semiplano.

4.11. *Dados $P(7, 2)$, $r \equiv 3x_1+5x_2-16=0$, en el sistema de referencia $(0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, hállense las coordenadas de P y la ecuación de r, en el nuevo sistema de referencia,* $(0', \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, dado por $\overrightarrow{OO'}=2\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2$; $\boldsymbol{v}_1=-5\boldsymbol{u}_1+3\boldsymbol{u}_2$; $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{u}_2$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}$$

En nuestro caso:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OO'} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = (2, 2) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}$$

Sistema 1

$(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$

$P(x_1, x_2)$

$\overrightarrow{OP} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2$

$\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}$

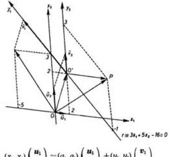
Sistema 2

$O'(O', \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$

$P(y_1, y_2)$

$\overrightarrow{O'P} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2$

$\overrightarrow{O'P} = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}; \qquad (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} + (y_1, y_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo la $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ dada más arriba, y teniendo en cuenta que las coordenadas de un vector en una base son únicas, queda:

$$(x_1, x_2) = (a_1, a_2) + (y_1, y_2)\, A \quad \text{ó} \quad (y_1, y_2) = (x_1 - a_1, x_2 - a_2)\, A^{-1}$$

Entonces:

$$(y_1, y_2) = (7-2, 2-2) \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (1, 0) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (-1, 3) \Rightarrow P(-1, 3)$$

Se sustituyen ahora x_1, x_2 de la recta por sus transformadas; es decir:

$$(x_1, x_2) = (2, 2) + (y_1, y_2) \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-5y_1+2,\ 3y_1+y_2+2)$$

$$r \equiv 3x_1+5x_2-16=0 \Rightarrow r \equiv 3(-5y_1+2)+5(3y_1+y_2+2)-16=0 \Rightarrow r \equiv y_2=0$$

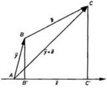
4.12. Demuéstrese que el producto escalar definido entre los vectores libres del plano,

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|\cdot\cos(\bar{x},\bar{y})$$

verifica la propiedad 3 del producto escalar general, $\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})=\bar{x}\bar{y}+\bar{x}\bar{z}$.

En efecto,

$$\begin{aligned}\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})&=|\bar{x}|\,|\bar{y}+\bar{z}|\cos(\widehat{\bar{x},\bar{y}}+\bar{z})=|\bar{x}|\cdot|\overrightarrow{AC'}|=|\bar{x}|\,(|\overrightarrow{AB'}|+|\overrightarrow{B'C'}|=\\&=|\bar{x}|(|\bar{y}|\cos(\widehat{\bar{x}\bar{y}})+|\bar{z}|\cos(\widehat{\bar{x}\bar{z}}))=|x|\,|y|\cos(\widehat{\bar{x}\bar{y}})+|\bar{x}||\bar{z}|\cos(\widehat{\bar{x}\bar{z}})=\\&=\bar{x}\bar{y}+\bar{x}\bar{z}\end{aligned}$$



4.13. *Dado el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales de grado* $\leqslant 2$, *se define*

$$P(x)\times Q(x)\xrightarrow{\ f\ }\mathcal{R}$$
$$(p,q)\longrightarrow\int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$$

Se pide:

a) Justificar que f es un producto escalar.
b) Calcúlese su ecuación y verifíquese que con dicho producto escalar el espacio vectorial dado pasa a ser un espacio vectorial euclidiano.

a) $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}$, es obvio, ya que $p(x)\cdot q(x)=q(x)\cdot p(x)$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\cdot(\lambda\boldsymbol{q}+\mu\boldsymbol{r})&=\int_0^1 p(x)\,[\lambda q(x)+\mu r(x)]\,dx=\lambda\int_0^1 p(x)q(x)\,dx+\mu\int_0^1 p(x)r(x)\,dx=\\&=\lambda(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})+\mu(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}>0,\ \text{si}\ \ \boldsymbol{p}\neq 0\\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=0\iff\boldsymbol{p}=0\end{array}\right\}\ \text{evidente, pues}\ \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 p(x)p(x)\,dx=\int_0^1[p(x)]^2dx\neq 0,\ \text{si}\ p(x)\neq 0\\ \displaystyle\int_0^1 0\,dx=0\int_0^1 dx=0\end{array}\right.$$

b) Bastará calcular la matriz que lo define, por medio de los productos escalares de los elementos de la base: $(1,x,x^2)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$.

$a_{11}=1\cdot 1=1.$
$a_{21}=x\cdot 1=x.$
$a_{23}=x\cdot x^2=x^3.$
....
$a_{ij}=x^{i-1}\cdot x^{j-1},\ i,j=1,2,3.$

Llamando $A=(\alpha_{ij})_{3\times 3}$, será:

$$\alpha_{ij}=\int_0^1 a_{ij}\,dx=\int_0^1 x^{i-1}x^{j-1}\,dx=\int_0^1 x^{i+j-2}\,dx=\left[\frac{x^{i+j-1}}{i+j-1}\right]_0^1=\frac{1}{i+j-1}$$

Con ello, $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=(p_1,p_2,p_3)\,A\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}$

Como A es simétrica (primer punto del apartado anterior), el producto escalar es simétrico. Además, $\dim V=3=r(A)\Rightarrow$ Espacio vectorial euclidiano.

4.14. *Dado un vector $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, cualquier vector $\boldsymbol{x}$ admite una descomposición única*

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}/\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}=0$$

Pruébese.

El problema consiste en la discusión de las incógnitas $\lambda\in\mathcal{R}$ e $\boldsymbol{y}\in V$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})+0=\lambda\cdot a^2\iff\lambda=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}}{a^2}$, que es la coordenada del $\boldsymbol{x}$, según la dirección del $\boldsymbol{a}$.

Recíprocamente, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}}{a^2}\cdot\boldsymbol{a}$ es tal que

$$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}}{a^2}\cdot\boldsymbol{a}\right)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=0$$

A este $\boldsymbol{y}$ se le denomina componente de $\boldsymbol{x}$, en dirección ortogonal del $\boldsymbol{a}$. Además, si $\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}/\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}=0\Rightarrow\lambda=0$, por lo anterior, y de $0=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{y}=(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{y}=0+y^2\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$.
Por consiguiente, la suma propuesta es directa.

4.15. *Una familia ortogonal de un espacio vectorial euclidiano, cuyos vectores son todos no nulos, es libre. Pruébese.*

Sea $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_p)$ tal familia; y supóngase que

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\dots+\lambda_p\boldsymbol{x}_p=\boldsymbol{0}$$

Multiplicando escalarmente esta igualdad por el vector $\boldsymbol{x}_k$,

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_k)+\dots+\lambda_k(\boldsymbol{x}_k\cdot\boldsymbol{x}_k)+\dots+\lambda_p(\boldsymbol{x}_p\cdot\boldsymbol{x}_k)=0$$

Como son ortogonales entre sí, $\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{x}_k=0,\ \forall j\neq k$, entonces, $\lambda_k|\boldsymbol{x}_k|^2=0$. Pero $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda_k=0$. Análogamente ocurriría con otro vector $\boldsymbol{x}_i$, por lo que: $\lambda_i=0,\ \forall i=1,2,\dots p\Rightarrow(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_p)$ es libre.

4.16. *Con el mismo enunciado del problema* 4.13, *calcúlese:*

a) *El producto escalar de $\boldsymbol{p}_1=1+x+x^2$ y $\boldsymbol{p}_2=1-2x+x^2$, y sus normas respectivas.*

b) *Dedúzcase una base ortonormal.*

a) $\left.\begin{array}{l} p_1=1+\ x+x^2=(1,1,1) \\ p_2=1-2x+x^2=(1,-2,1) \end{array}\right\}$ en base $(1, x, x^2)$.

$$p_1\cdot p_2=(1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=9/20$$

$$p_1\cdot p_1=(1,1,1)\,A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=37/10 \Rightarrow |p_1|=\sqrt{\frac{37}{10}}$$

$$p_2\cdot p_2=(1,-2,1)\,A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{5} \Rightarrow |p_2|=1/\sqrt{5}$$

b) Será una $(b_1, b_2, b_3)/\ b_i\cdot b_j=\delta_i^j=\begin{cases} 1, \text{ si } i=j \\ 0, \text{ si } i\neq j \end{cases}$

Ortogonalidad

Supongamos $b_1=1$; entonces, $b_2=\alpha b_1+a_2=x+\alpha b_1/b_1\cdot b_2=0$. (Véase problema 4.14.)

$$b_1=(1,0,0);\quad b_2=(\alpha,1,0) \Rightarrow b_1\cdot b_2=(1,0,0)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\alpha+1/2=0$$

Luego $\alpha=-1/2$, y entonces, $b_2=x-1/2=\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

Aplicando de nuevo el problema 4.14,

$$b_3=\lambda b_1+\mu b_2+x_3/b_1\cdot b_3=0 \text{ y } b_2\cdot b_3=0;\quad b_3=\left(\lambda-\frac{\mu}{2}, \mu, 1\right)$$

$$b_1\cdot b_3=(1,0,0)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} \lambda-\frac{\mu}{2} \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix}=\lambda+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow \lambda=-1/3$$

$$b_2\cdot b_3=(-1/2,1,0)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} \lambda-\frac{\mu}{2} \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{\mu}{12}+\frac{1}{12}=0 \Rightarrow \mu=-1$$

Por tanto, $b_3=x^2-x+\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}, -1, 1\right)$:

Según lo desarrollado en el problema 4.15, al ser tres vectores libres, forman base.

Normalización

Ha de conseguirse que $|b_1|=|b_2|=|b_3|=1$. Para ello, basta multiplicar a cada uno de los vectores $\boldsymbol{b}_i$ por el inverso de su módulo, es decir, por el inverso de $|\boldsymbol{b}_i|=+\sqrt{\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_i}$.

$$\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_1=(1,0,0)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1=\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{b}_2=(-1/2,1,0)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}=1/12$$

$$\boldsymbol{b}_3\cdot\boldsymbol{b}_3=\left(\frac{1}{6},-1,1\right)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}1/6\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{180}\ \Rightarrow\ |\boldsymbol{b}_1|=1;\quad |\boldsymbol{b}_2|=\frac{1}{2\sqrt{3}};\quad |\boldsymbol{b}_3|=\frac{1}{6\sqrt{5}}$$

En definitiva, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ ortonormada$=[1;\ \sqrt{3}(2x-1);\ \sqrt{5}(6x^2-6x+1)]$.

4.17. *Justifíquese la desigualdad de Schwarz: En un espacio vectorial euclidiano $V(\mathcal{R})$ se cumple: $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|,\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$.*

a) Si $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ó $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, es inmediato.

b) Sea $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. Según el problema 4.14, $\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}/\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}=0$, $\lambda=\dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{x^2}$.

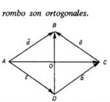
Entonces,

$$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}=y^2=(\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})\cdot(\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})=\lambda^2x^2+z^2=\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2}{(x^2)^2}\cdot x^2+z^2=\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2}{x^2}+z^2$$

Luego, $x^2y^2=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2+x^2z^2\geqslant(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2\ \Rightarrow$ la tesis.

4.18. *Demuéstrese que las diagonales de un rombo son ortogonales.*

Según la figura, se tiene:



$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$
$$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})=b^2-a^2=0$$

4.19. *En el espacio vectorial ortogonal de los vectores libres del plano se tiene la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)/|\boldsymbol{u}_1|=2$; $|\boldsymbol{u}_2|=5$; $\widehat{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2}=\pi/3$ rad, y los vectores $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2$. Hállese:*

a) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$.
b) $|\boldsymbol{x}|$ *e* $|\boldsymbol{y}|$.
c) *Angulo que forman $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.*
d) *Coordenadas covariantes de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, respecto de la misma base.*

Antes de nada, se deduce la ecuación que define el producto escalar:

$$u_{11}=\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1=4$$
$$u_{12}=\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=2\cdot5\cdot\cos\frac{\pi}{3}=5$$
$$u_{21}=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_1=2\cdot5\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=5\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(x^1,x^2)\begin{pmatrix}4&5\\5&25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\y^2\end{pmatrix}$$
$$u_{22}=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2=25$$

a) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(1,-1)\begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=-43$. Llamando $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 25\end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=(1,-1)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=19 \Rightarrow |\boldsymbol{x}|=\sqrt{19}$

$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}=(3,2)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=196 \Rightarrow |\boldsymbol{y}|=\sqrt{196}=14$

c) $\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}=\dfrac{-43}{\sqrt{19}\cdot 14} \Rightarrow \alpha=\arccos\dfrac{-43}{14\sqrt{19}}\in[0,\pi]$

d) $(x_1, x_2)=(1,-1)\cdot A=(-1,-20)$, del vector $\boldsymbol{x}$
$(y_1, y_2)=(3,2)\cdot A=(22,65)$, del vector $\boldsymbol{y}$

4.20. *Sea $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ una base ortonormal del espacio vectorial $V_2(\mathcal{R})$. Demuéstrese que $\boldsymbol{v}_1=1/\sqrt{2}\cdot(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)$ y $\boldsymbol{v}_2=1/\sqrt{2}\cdot(-\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)$, forman base ortonormal.*

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)\cdot(-\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)\right]=\frac{1}{2}(-u_1^2+u_2^2)=\frac{1}{2}(-1+1)=0$$

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)\cdot(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)\right]=\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

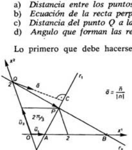
$$\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2=\frac{1}{2}\left[(-\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)\cdot(-\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)\right]=\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)=1$$

Por la primera igualdad, al ser no nulos, forman base ortogonal, según el problema 4.15; y, por las dos últimas, están normalizados.

4.21. *Dadas las rectas $r_1\equiv x^1-x^2-1=0$ y $r_2\equiv x^1+2x^2-4=0$, en el sistema de referencia $(0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)/|\boldsymbol{u}_1|=2, |\boldsymbol{u}_2|=3$, $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$ rad, se pide:*

a) *Distancia entre los puntos $P=r_1\cap r_2$ y $Q=r_2\cap(x^1=0)$.*
b) *Ecuación de la recta perpendicular a r_1 por el punto Q.*
c) *Distancia del punto Q a la recta r_1.*
d) *Angulo que forman las rectas dadas.*

Lo primero que debe hacerse es calcular la matriz fundamental:



$u_{11}=\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1=4;\quad u_{21}=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_1=-3$
$u_{12}=\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=-3;\quad u_{22}=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2=9$

$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

$U=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1}=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix}9 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

a) $r_1\cap r_2=P(2,1);\ r_2\cap(x^1=0)=Q(0,2)$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=(2,1)\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}=(5,3)\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}=6 \Rightarrow d(P,Q)=\sqrt{6}$$

b) Un vector normal a r_1 es $\boldsymbol{n}=(1, -1)$, en covariantes. Entonces, $\boldsymbol{n}=(\alpha', \beta')=(1, -1)\cdot U^{-1}=\frac{1}{27}(6, -1)$ en contravariantes, y se puede tomar el $(6, -1)$, pues es de la misma dirección que el hallado.

Como $Q(0, 2) \Rightarrow r_1 \perp \left(r \equiv \frac{x^1-0}{6}=\frac{x^2-2}{-1}\right) \Rightarrow r \equiv x^1+6x^2-12=0$

c) Vectores direccionales respectivos: $\boldsymbol{v}_1=(1, 1)$ y $\boldsymbol{v}_2=(-2, 1)$

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1|\,|\boldsymbol{v}_2|}=\frac{(1,\ 1)\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}}{\sqrt{(1,\ 1)\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}\sqrt{(-2,\ 1)\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{37}}=\frac{4}{\sqrt{259}}$$

$$\varphi=\text{arc cos}\,\frac{4}{\sqrt{259}}$$

d) Tenemos $Q(0, 2)$.
Un punto cualquiera de r_1 puede ser el $P(2, 1)$. Un vector ortogonal a r_1 es $\boldsymbol{n}=(1, -1)$. Entonces (obsérvese la figura),

$$d(Q, r_1)=|\overrightarrow{QC}|=\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{a}=\overrightarrow{QP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$$

Como $\overrightarrow{QP}=(2, -1)$ está dado en contravariantes, y $\boldsymbol{n}=(1, -1)$ en covariantes $\Rightarrow \overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{n}=(2, -1)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=3$; y $|\boldsymbol{n}|^2=(1, -1)\left[\frac{1}{27}\begin{pmatrix}9 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=$

$=\frac{7}{27} \Rightarrow |\boldsymbol{n}|=\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$; luego $d(Q, r_1)=9\sqrt{\frac{3}{7}}$.

4.22. *Resuélvase el problema anterior, tomando la base ortonormada.*

a) $r_1 \cap r_2=P(2, 1)$; $r_2 \cap (x=0)=Q(0, 2)$

$d(P, Q)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(0-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}.$

b) Se tienen $Q(0, 2)$ y $\boldsymbol{n}=(1, -1) \perp r_1$. Entonces,

$$r_1 \perp \left(r \equiv \frac{x-0}{1}=\frac{y-2}{-1}\right) \Rightarrow r \equiv x+y-2=0$$

De otra manera: $r \equiv x+y+\lambda=0$; como $Q \in r \Rightarrow 0+2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2$, que produce el mismo resultado anterior.

c) Se pueden poner las ecuaciones de las rectas en forma explícita:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \equiv y=x-1 \Rightarrow m_1=1 \\ r_2 \equiv y=-\frac{1}{2}x+2 \Rightarrow m_2=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg}\,\varphi=\frac{-1/2-1}{1-1/2}=-3 \Rightarrow \varphi=\text{arc tg}\,(-3)$$

d) $d(Q, r_1)=\frac{0-2-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{-3}{\sqrt{2}}$, pues Q está en el semiplano negativo de la recta.

4.23. *Hállese la recta paralela, en su forma normal, a la* $r\equiv 3x-4y=12$, *que dista tres unidades de ella.*

Un punto $Q(x_0, y_0)\in s$, distará tres unidades de la dada, si $\dfrac{3x_0-4y_0-12}{\pm 5}=$ $=3 \Rightarrow$ dos soluciones:

$$s_1\equiv 3x-4y-27=0$$
$$s_2\equiv 3x-4y+\ 3=0$$

Como $\boldsymbol{n}=(3,-4)\perp r \Rightarrow \dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$; luego en forma normal, son:

$$s_1\equiv\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{27}{5}=0$$

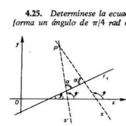
$$s_2\equiv\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{3}{5}=0$$

4.24. *Hállese la recta paralela a la* $r\equiv 3x-4y=12$, *que dista tres unidades del* $P(2, 2)$.

$s//r \Rightarrow s\equiv 3x-4y+\lambda=0$; como P ha de distar de s tres unidades, $\dfrac{6-8+\lambda}{\pm 5}=3 \Rightarrow \lambda_1=17$; $\lambda_2=-13$.

Las dos soluciones son: $s_1\equiv 3x-4y+17=0$; $s_2\equiv 3x-4y-13=0$.

4.25. *Determínese la ecuación de la recta que, pasando por el punto* $P(2, 2)$, *forma un ángulo de* $\pi/4$ *rad con la* $r_1\equiv x+3y-3=0$.



Observemos sobre la figura el caso general. Evidentemente, hay dos soluciones, s y s'. Sus inclinaciones respectivas cumplen:

$\varphi=\varphi_1+(\pi-\alpha)$; $\varphi'=\varphi_1+\alpha$ / $\alpha=$ángulo dato

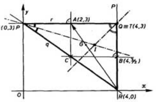
Por tanto, sus pendientes son

$$m=\frac{m_1-\operatorname{tg}\alpha}{1+m_1\operatorname{tg}\alpha};\quad m'=\frac{m_1+\operatorname{tg}\alpha}{1-m_1\operatorname{tg}\alpha}$$

En el caso del problema, $m=\dfrac{-1/3-1}{1-1/3}=-2$, y $m'=\dfrac{1}{2}$; luego, de $y-2=$ $=m(x-2) \Rightarrow s\equiv 2x+y-6=0$; y, análogamente, $s'\equiv x-2y+2=0$.

4.26. *Hállense el baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro del triángulo formado por las rectas* $p\equiv x-4=0$; $q\equiv 3x+4y-12=0$; $r\equiv y-3=0$.

$$r\cap q=P(0, 3);\quad p\cap r=Q(4, 3)$$
$$p\cap q=R(4, 0);\quad \overrightarrow{PQ}=(4, 0)$$
$$\overrightarrow{PR}=(4, -3);\quad \overrightarrow{RQ}=(0, 3)$$



Sea $A(2, 3)$ el punto medio del lado $r \equiv \overrightarrow{PQ}$, llamando G al *baricentro*, y según el problema 4.1,

$$\overrightarrow{RG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{RA}$$

Entonces,

$$(x-4, y)=\frac{2}{3}(-2, 3) \Rightarrow G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$$

Ortocentro es el punto de intersección de las alturas de un triángulo. Bastará hallar dos de ellas, y cortarlas.

Un vector "sencillo", ortogonal al $\overrightarrow{PQ}$ y, por tanto, direccional de la altura, es el $(0, 1) \Rightarrow h_r \equiv \dfrac{x-4}{0}=\dfrac{y-0}{1} \equiv x-4=0.$

Cualquier recta perpendicular a q tiene la forma $4x-3y+\lambda=0$. Si, además, la que se busca ha de pasar por $Q \Rightarrow 4\cdot 4-3\cdot 3+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-7 \Rightarrow \Rightarrow h_q \equiv 4x-3y-7=0.$

El ortocentro buscado es $T=h_r \cap h_q=(4, 3)$.

Circuncentro es el punto de corte de las mediatrices de los lados de un triángulo, que son las perpendiculares a esos lados en sus puntos medios.

m_p: vector direccional $(1, 0)$; punto medio $B(4, 3/2) \Rightarrow m_p \equiv \dfrac{x-4}{1}= =\dfrac{y-\frac{3}{2}}{0} \equiv y-\dfrac{3}{2}=0.$

m_r: vector direccional $(0, 1)$; punto medio $A(2, 3) \Rightarrow m_r \equiv \dfrac{x-2}{0}= =\dfrac{y-3}{1} \equiv x-2=0.$

El circuncentro es $C=m_p \cap m_r=\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$

Incentro es el punto de intersección de las bisectrices interiores de un triángulo.

b_P equidista de los lados r y $q \Rightarrow b_P \equiv \dfrac{y-3}{1}=\dfrac{3x+4y-12}{\pm 5}$

b_Q equidista de los lados p y $r \Rightarrow b_Q \equiv \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{\pm 1}.$

Las cuatro rectas establecidas son las bisectrices de los ángulos P y Q, respectivamente. El problema consiste en averiguar cuáles son las interiores al mismo.

Cada recta bisectriz divide al plano en dos semiplanos. Si es interior al triángulo, los otros dos vértices estarán en distintos semiplanos, por lo que sustituidas las coordenadas de esos dos vértices en las ecuaciones —en forma general— de las bisectrices, han de dar signos diferentes. Así,

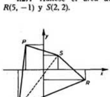
$b_{P,1}=3x-y+3=0;\quad b_{P,2}=x+3y-9=0;\quad b_{Q,1}=x-y-1=0;\quad b_{Q,2}=x+y-7=0.$

$\left.\begin{matrix} b_{P,1}(Q)>0 \\ b_{P,1}(R)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b_{P,1}$ no es bisectriz interior.

$\left.\begin{matrix} b_{P,2}(Q)>0 \\ b_{P,2}(R)<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b_{P,2}$ es bisectriz interior.

Con el mismo análisis, $b_{Q,1}$ es bisectriz interior.
El incentro buscado es $I=b_{P,2}\cap b_{Q,1}=(3,2)$.

4.27. *Hállese el área del cuadrilátero, de vértices* $P(-2,3)$, $Q(-3,-4)$ $R(5,-1)$ y $S(2,2)$.



$S=$ Area $PQS+$ Area QSR.

Area $PQS=\dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{PQ}\cdot x|\ /\ x=(1,4)\perp\overrightarrow{PS}$ y $|x|=|\overrightarrow{PS}|$.

Area $PQS=\dfrac{1}{2}\,|(-1,-7)\cdot(1,4)|=\dfrac{1}{2}\cdot 29\ u^2$.

Análogamente, en el triángulo QSR,

$y=(-3,8)\perp\overrightarrow{QR}$ y $|y|=|\overrightarrow{QR}|$

Area $QSR=\dfrac{1}{2}\,|(5,6)\cdot(-3,8)|=\dfrac{1}{2}\cdot 33\ u^2$.

Sumando, $S=31\ u^2$.

Nota. Una forma cómoda de calcular el área de un triángulo de vértices $A(a_1,a_2)$ $B(b_1,b_2)$ y $C(c_1,c_2)$ es tomar el valor absoluto de la expresión

$$\text{Area}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

4.28. Demuéstrese que las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

4.29. Justifíquese: si dirección $x\neq$ dirección y, entonces, $\lambda_1 x+\mu_1 y=\lambda_2 x+\mu_2 y\Rightarrow$
$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2\\ \mu_1=\mu_2\end{cases}$

4.30. Exprésense los lados de un hexágono regular en función de dos de ellos cualesquiera consecutivos.

4.31. En un espacio vectorial euclidiano real, $|v+w|\leq|v|+|w|$. La relación es una igualdad $\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathcal{R}^+/v=\lambda w$.
Orientación: Aplíquense la desigualdad de Schwarz y el problema 4.14.

4.32. Pruébese que $\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b$.

4.33. Descompóngase el vector $a=(3, 4)$ en suma de otros dos, x, y, tales que x tenga la dirección del $z=(5, 1)$ e $y\perp z$.

4.34. En el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales de grado ≤ 1, hállense las coordenadas covariantes de un vector en la base $(1, x)$.

4.35. Hállense las coordenadas covariantes de los $p_i(x)$ del problema 4.16.

4.36. Dadas dos rectas, $P\oplus\lambda a$; $Q\oplus\mu b\ /\ a=\alpha\cdot b$, demuéstrese que $r//r'\wedge r\neq r'$ o $r\cap r'=\varnothing$.

4.37. Con el mismo planteamiento anterior, pero a, b, linealmente independientes. Demuéstrese que ambas rectas se cortan en un único punto.

4.38. Dada una recta r y un punto exterior a ella Q, pruébese que por Q pasa una r' paralela a r.

4.39. Dadas tres rectas paralelas y distintas, y los lados de dos triángulos ABC y $A'B'C'$, tales que $AB//A'B'$ y $AC//A'C'$, justifíquese que $BC//B'C'$, estando los vértices de los triángulos en las rectas dadas.

4.40. En un $V_4(\mathcal{R})$, descompóngase el $a=(1, 2, 3, 4)$ en a' y a''. El a', en el subespacio engendrado por $\{a_1=(0, 1, 0, 1),\ a_2=(1, 0, 1, 0)\}$; y el a'', ortogonal a dicho subespacio. La base en $V_4(\mathcal{R})$ es ortonormada.

4.41. Sea (u_1, u_2, u_3) una base ortonormada de un $V_3(\mathcal{R})$. Pruébese que

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\frac{1}{3}(2u_1+2u_2-u_3)\\ v_2&=\frac{1}{3}(2u_1-u_2+2u_3)\\ v_3&=\frac{1}{3}(-u_1+2u_2+2u_3)\end{aligned}\right\}\quad\text{forman base ortonormada.}$$

4.42. Obténgase en todas sus formas afines la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1/3, -2)$ y $B(2, -1/2)$.

4.43. Determínese cuál es la posición relativa de los siguientes dos pares de rectas:

$$\left.\begin{aligned} r_1&:\begin{cases} x=-2+3\lambda\\ y=1+\lambda\end{cases}\\ r_2&=x-3y+8=0\end{aligned}\right\}\qquad\qquad \left.\begin{aligned} r_1&:\begin{cases} x=3-\lambda\\ y=-1+5\lambda\end{cases}\\ r_2&=4x-3y+5=0\end{aligned}\right\}$$

4.44. Dadas las rectas

$$\begin{aligned} x-3y+5&=0\\ 2x+y+3&=0\\ mx+2y-4&=0\end{aligned}$$

hállese el valor de m para que las tres sean concurrentes (es decir, pasen por el mismo punto).

4.45. Dados tres puntos no alineados en el plano afín, P, Q y R, demuéstrese que la recta que une los puntos medios de los segmentos PQ y PR es paralela a la recta QR.

4.46. Si P, Q, R y S son cuatro puntos del plano afín no alienados tres a tres, y se llama A, B, C y D a los puntos medios de los segmentos PQ, QR, RS y SP, respectivamente, demuéstrese que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

4.47. Hállense los vértices de un pentágono del que se conocen los puntos medios de sus lados, que son: de AB, $(0, 1)$; de BC, $(1, 0)$; de CD, $(1, -1)$; de DE, $(0, -1)$; de EA, $(-2, 1)$.

4.48. Se considera, para m real, la recta

$$mx-(2m+1)y+m-3=0$$

Se pide:

a) ¿Para qué valor de m la recta pasa por el punto $(1, 3)$?
b) ¿Hay algún valor de m para el cual la recta resultante sea paralela a la que pasa por $(1, -4)$ y tiene vector de dirección $(2, -3)$?

4.49. Justifíquese que el triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(0, 5/2)$ y $O(0, 0)$ es isósceles.

4.50. Demuéstrese que el punto $X(2+2m, 3-m)$ equidista, cualquiera que sea m, de los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 5)$.

4.51. Determínese el valor que debe dársele a p para que la recta

$$(3+p)x-5y+2=0$$

sea perpendicular a la que determina sobre los ejes OX, OY segmentos respectivos iguales a -3 y 2

4.52. De todas las rectas que pasan por el punto $(2, 1)$, encuéntrese las que distan una unidad del origen.

4.53. De un paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A(2, 0)$, $B(3, 5)$ y $C(-1, 4)$. ¿Cuál es su área?

4.54. Descomponiendo en triángulos, hállese el área del pentágono cuyos vértices son: $A(0, 0)$, $B(0, 5)$, $C(2, 6)$, $D(3, 4)$ y $E(2, -1)$.

4.55. El lado desigual de un triángulo isósceles tiene de extremos los puntos $A(4, 0)$ y $B(-1, -1)$. Su tercer vértice, $C \in r \equiv x-2y+8=0$. Determínense C y la longitud de la altura h_c.

4.56. Determínese el ángulo que forman las rectas $r_1 \equiv 2x+3y-13=0$ y $r_2 \equiv 3x-2y-13=0$.

4.57. Siendo $r \equiv 2x-3y=5$ y $s \equiv 6x+my=7$, calcúlese m, tal que:

1) $r // s$.
2) $r \perp s$.

4.58. Dadas las rectas

$$r \equiv 2x+3y-5=0 \quad \text{y} \quad s \equiv 5x-ky+1=0,$$

hállese k para que $r//s$. Luego, calcúlese la distancia entre r y s.

4.59. Hállese la ecuación de la recta perteneciente al haz

$$\begin{cases} r \equiv x+4y-18=0 \\ s \equiv x+2y-\ \ 2=0 \end{cases}$$

que dista del origen dos unidades.

4.60. Los lados iguales de un triángulo isósceles están en las rectas

$$3x+2y-6=0 \quad \text{y} \quad 2x+3y+6=0.$$

Determínese la recta soporte de su lado desigual, para que el baricentro del triángulo sea $O(0, 0)$.

4.61. Calcúlense el perímetro y el área del cuadrilátero formado por los ejes de coordenadas ortonormales y las rectas $3x+4y=12$ y $5x+6y=30$.

4.62. Dada la recta $r \equiv 3x-5y+25=0$ y los puntos $P(3, 4)$ y $Q(7, 8)$, hállese un punto A, tal que $A \in r$ y $\overline{PA}=\overline{AQ}$.

4.63. Dados los haces $y=mx+2$ e $y=3x-n$, demuéstrese que hay una recta del primero, perpendicular a todas las rectas del segundo. Determínese su ecuación.

4.64. Dados los puntos $P(0, -1)$ y $Q(1, 2)$, determínense las coordenadas de un punto $A \in r \equiv x+y=2$, de modo que $AP \perp AQ$.

4.65. Dibújense las regiones limitadas por los semiplanos

a) $\begin{cases} 2x-y+2 \leqslant 0 \\ x-2y \leqslant 2 \\ x+y-5 \leqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y \leqslant 10 \\ x+3y-5 \leqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

4.66. Siendo $A(2, 8)$, $B(3, 6)$, $C(-2, -3)$ y $D(1, 1)$, calcúlense $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

4.67. Dados los puntos $A(1, 7)$ y $B(6, 3)$, determínese el punto P de la recta que determinan los dos primeros, sabiendo que $\overrightarrow{PA}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PB}$.

4.68. El punto $P(2, -3)$ es extremo del vector $\overrightarrow{PR}$. El punto $Q(1, -2)$, alineado con P y R, dista de P la quinta parte de $|\overrightarrow{PR}|$. Determínese R.

4.69. Las coordenadas en el origen de una recta son números opuestos. El punto $A(-3, -4)$ pertenece a la recta. Establézcase su ecuación en todas las formas afines.

4.70. Una recta determina con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\dfrac{1}{2}$. El punto $P(6, -1)$ es de la recta. Hállese su ecuación en todas las formas afines.

4.71. Determínense m y n en las rectas $mx+y=9$ y $nx+2y=6$, sabiendo que son paralelas y que la abscisa en el origen de la primera es $x=3$.

4.72. Los vértices de un triángulo son $A(-3, 2)$; $B(0, -1)$; $C(3, -2)$. Por cada uno de sus vértices se trazan paralelas a los lados opuestos, consiguiéndose otro triángulo del que se pide ecuación de sus lados y vértices.

4.73. Justifíquese que el triángulo de vértices $P(-8, -2)$; $Q(-11, 3)$; $R(3, 8)$, es isósceles. Luego, calcúlese su superficie.

4.74. Analícese de qué clase es el triángulo de vértices $P(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$; $Q(-2, -2)$; $R(2, 2)$. Después, calcúlese su área.

4.75. Determínese el ángulo que forman las rectas que se dan

a) $\begin{cases} y=3x-2 \\ y=5-x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y+x-5=0 \\ 2x+y=6 \end{cases}$ c) $\begin{Bmatrix} x=3+\lambda & x=3\lambda \\ y=1-2\lambda & y=-2+5\lambda \end{Bmatrix}$

4.76. El punto $A(6, -2) \in r \equiv \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. Se cumple que $b-a=1$. Determínese r.

4.77. Hállense m y n, para que los productos escalares que se indican tengan los valores que se expresan:

$$(-2, m)\cdot(5, -3)=-6; \quad (n, -5)\cdot\left(\frac{7}{3}, 4\right)=14$$

4.78. Hállese el número por el que han de dividirse las componentes del vector $(12, -5)$, para obtener otro de su dirección y de módulo 1; también, para conseguir el unimodular, perpendicular al dado.

4.79. Determínese la traslación t, de modo que $r = 2x - 5y = 0$, $P(-7, 4) \in r'$, siendo $t(r) = r'$.

4.80. Las rectas $r_1 \equiv ax + 4y = 0$ y $r_2 \equiv bx - 6y = 5$, son perpendiculares. Hállense a y b, sabiendo que $P(2, -3) \in r_1$.

4.81. El rectángulo $OABC$ tiene dos de sus vértices $O(0, 0)$ y $B(2, 6)$. Uno de sus lados está sobre la recta $2x - 3y = 0$. Hállense las ecuaciones de sus otros tres lados.

4.82. Calcúlese la longitud de las tres alturas del triángulo cuyos vértices son $A(5, 5)$, $B(1, 1)$ y $C(7, 1)$.

4.83. Dos lados opuestos de un cuadrado están sobre las rectas $2x + 3y - 3 = 0$ y $2x + 3y + 4 = 0$. Calcúlese su área.

4.84. Calcúlese la distancia del punto $A(3, -1)$ a la recta que contiene a $P(2, 4)$ y es perpendicular a la $s \equiv 2x + y - 5 = 0$.

4.85. Determínense p y q, para que las rectas $px + 6y - 5 = 0$ y $qx - 2y = 0$, sean perpendiculares, sabiendo que el punto $(2, 3)$ pertenece a la primera.

4.86. Establézcase la ecuación normal de la recta perpendicular a la $3x - 4y - 12 = 0$, que dista del punto $A(2, 2)$, dos unidades.

4.87. Dada la recta $y = x - 6$, encuéntrese la ecuación de otra, en la forma y casos que se indican:

a) Paralela a la dada, y a seis unidades del origen (forma general).
b) Paralela a la dada, a distancia $\sqrt{2}$ de ella (en forma normal).

4.88. Encuéntrese una recta r, tal que $r // s$ y $d(Tr) = 2\sqrt{13}$, siendo $s \equiv 2x - 3y - 6 = 0$ y $T(3, 1)$.

4.89. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son $(0, 5)$ y $(3, 1)$. Determínense los otros vértices y su superficie.

4.90. Las rectas $4x + y = -3$ y $4x + y = 7$ son tangentes a una circunferencia, de la que se pide el lugar geométrico de su centro, y longitud.

4.91. Por el punto $P = (2x - y + 2 = 0) \cap (x - y + 1 = 0)$, trácese otra recta que forme con los ejes un triángulo de $3/2\ u^2$ de área.

4.92. La recta $8x + 15y + c = 0$ dista cinco unidades del punto $P(2, 3)$. Hállese c.

4.93. Hállese el lugar geométrico

a) de los puntos cuya abscisa es la mitad de su distancia a $r = 12x - 5y = 1$;
b) de los puntos cuya razón de distancias a las rectas $5x + 12y = 8$ y $4x - 3y + 4 = 0$, es $5/13$.

4.94. Hállense el baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro de los triángulos cuyos vértices son:

a) $O(0, 0)$	*b)* $A(-4, -3)$	*c)* $P(5, 0)$
$A(0, 3)$	$B(0, -3)$	$Q(3, 8)$
$B(4, 0)$	$C(-4, 0)$	$R(1, 2)$

4.95. Determínense las matrices fundamentales, correspondientes a las bases

$$\widehat{\bar{u}_1\,\bar{u}_2} = 30^\circ \quad |\bar{u}_1| = 3; \qquad |\bar{u}_2| = 5$$
$$\widehat{\bar{u}_1\,\bar{u}_2} = 120^\circ \quad |\bar{u}_1| = 2; \qquad |\bar{u}_2| = 2$$

hallando luego el producto escalar de los vectores $\bar{x} = (3, -2)$, $\bar{y} = (5, 1)$, respecto de la base primera; el módulo y ángulo que forman los siguientes vectores: $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (-2, 3)$. Tómese como base la segunda.

4.96. Dada la matriz fundamental $U=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, determínense las coordenadas covariantes de los vectores $\bar{a}=(3, 1)$ y $\bar{b}=(-2, 5)$, y la ecuación de la recta que pasa por el punto $A=(1, 2)$ y es perpendicular a $x_1+3x_2=7$.

4.97. Calcúlense:

a) Distancia entre las rectas paralelas $\begin{cases} 2x_1- \ x_2=3 \\ 4x_1-2x_2=7 \end{cases}$, para $U=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Angulo de las rectas $\begin{cases} x_1+ \ x_2=3 \\ 2x_1-3x_2=1 \end{cases}$, para la misma matriz fundamental.

c) Distancia del punto $P=(2, 1)$ a la recta $2x_1-4x_2=3$. Usese la matriz fundamental del problema 4.96.

4.98. Dado el punto $P(3, 2)$ respecto del sistema de referencia $(0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, hállense sus coordenadas respecto del nuevo sistema $(0', \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, tal que $\overrightarrow{00'}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$; $\mathbf{v}_1=3\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$; $\mathbf{v}_2=2\mathbf{u}_1-3\mathbf{u}_2$.

5

El espacio

Espacio afín real

La estructura del espacio afín real es la misma que la del plano afín. La única diferencia es la *dimensión*, que en el caso del espacio es dim $V(\mathcal{R})=3$.

Coordenadas de un vector, según las afines de sus puntos extremos

Sistema de referencia: $(O,\ \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$; $\overrightarrow{PQ}=(q_1-p_1,\ q_2-p_2,\ q_3-p_3)$.

Recta

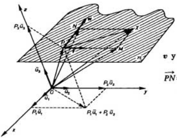
En todo análogo a lo expuesto en el plano.

Plano

$\Pi=\{X\in E_3/X=P\oplus(\mu\boldsymbol{v}+\lambda\boldsymbol{w})$, con P fijo; $(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})$ independientes; $\lambda,\ \mu\in\mathcal{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(p_1,\ p_2,\ p_3) \\ M(m_1,\ m_2,\ m_3) \\ N(n_1,\ n_2,\ n_3) \end{array}\right\}\text{en } \Pi$$

Según el sistema de referencia, $(O,\ \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$,



$\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, vectores libres independientes

$$\overrightarrow{PN}=\lambda \boldsymbol{w}; \quad \overrightarrow{PM}=\mu \boldsymbol{v}; \quad \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}$$

$$\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3); \quad \boldsymbol{w}=(w_1, w_2, w_3)$$

$$X(x, y, z)$$

Formas afines de la ecuación del plano

Afín: $(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3) \oplus \left\{ \mu(v_1,v_2,v_3)+\lambda(w_1,w_2,w_3) \right\}$	
Vectorial: $(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3)+\mu^{-1}(m_1-p_1, m_2-p_2, m_3-p_3)+\lambda^{-1}(n_1-p_1, n_2-p_2, n_3-p_3)$	
Paramétrica $x=p_1+\mu v_1+\lambda w_1$ $y=p_2+\mu v_2+\lambda w_2 \Longrightarrow$ $z=p_3+\mu v_3+\lambda w_3$	**Cartesiana** $\begin{vmatrix} x-p_1 & v_1 & w_1 \\ y-p_2 & v_2 & w_2 \\ z-p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$ ó $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 1 & m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0$
General $Ax+By+Cz+D=0$	**Canónica** $\frac{x}{-D/A}=\frac{y}{-D/B}=\frac{z}{-D/C}=1$ (Los denominadores son los segmentos que determina sobre los ejes)

Ecuaciones de la recta

Afín: $(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3) \oplus \lambda(q_1-p_1, q_2-p_2, q_3-p_3) \;/\; \left.\begin{matrix} Q(q_1,q_2,q_3) \\ P(p_1,p_2,p_3) \end{matrix}\right\} \in r$		
Vectorial: $(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3)+\mu(a_1,a_2,a_3) \;/\; \bar{a}=(a_1,a_2,a_3)=\mu . \overrightarrow{PQ}$		
Paramétrica $x=p_1+\lambda(q_1-p_1)$ $y=p_2+\lambda(q_2-p_2)$ $z=p_3+\lambda(q_3-p_3)$	**Contínua** $\frac{x-p_1}{a_1}=\frac{y-p_2}{a_2}=\frac{z-p_3}{a_3}$	**Implícita** $Ax+By+Cz+D=0$ $A'x+B'y+C'z+D'=0$
	$a_1=\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$; $a_2=\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}$; $a_3=\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$	

Posiciones de un plano, respecto del triedro de referencia

$x=0$ $y=0$ $z=0$	Planos coordenados $\begin{cases} yOz \\ xOz \\ xOy \end{cases}$
$Ax+By+Cz+D=0$	Plano que corta a los tres ejes, según los segmentos dados por la forma canónica
$Ax+By+Cz=0$	Plano que pasa por el origen
$By+Cz+D=0$ $Ax+Cz+D=0$ $Ax+By+D=0$	Plano paralelo al eje $\begin{cases} OX \\ OY \\ OZ \end{cases}$
$By+Cz=0$ $Ax+Cz=0$ $Ax+By=0$	Plano que pasa por el eje $\begin{cases} OX \\ OY \\ OZ \end{cases}$
$Ax+D=0$ $By+D=0$ $Cz+D=0$	Plano paralelo al $\begin{cases} yOz \\ xOz \\ xOy \end{cases}$

Posiciones relativas

Punto en recta o punto en plano

Un punto $P \in r$ ó $P \in \Pi$, si sus coordenadas satisfacen las ecuaciones de $r=0$ o $\Pi=0$, respectivamente. En caso contrario, se encuentra fuera de ellos.

Plano-plano

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ \Pi_2 &= A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned} \qquad M_c=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad M_a=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Coincidentes	Paralelos	Secantes
$\pi_1 \equiv \pi_2$ $r(M_c)=1=r(M_a) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \frac{A}{A_2}=\frac{B_1}{B}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$	$\pi_1 // \pi_2 \wedge \pi_1 \neq \pi_2$ ó $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ $r(M_c)=1 \neq r(M_a)=2 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$	$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset \wedge \pi_1 \cap \pi_2 = r$ $r(M_c)=r(M_a)=2$

Haz lineal de planos

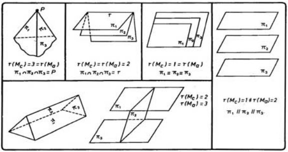
Sean los planos $\Pi_1=0$ y $\Pi_2=0$.

a) Paralelos: $\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \Pi_1=\Pi_2+\lambda$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.

b) De arista una recta: $\{\Pi_1+\alpha\Pi_2=0 / \Pi_1 \neq \Pi_2 \wedge \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Tres planos

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= A_1x+B_1y+C_1z+D_1=O \\ \Pi_2 &= A_2x+B_2y+C_2z+D_2=O \\ \Pi_3 &= A_3x+B_3y+C_3z+D_3=O \end{aligned} \qquad M_c=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M_a=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$



Recta-recta

Siempre se podrán poner en forma vectorial. Así, sean:

$$r_1 = \overrightarrow{OX_1} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \boldsymbol{v}; \qquad r_2 = \overrightarrow{OX_2} = \overrightarrow{OQ} + \mu \cdot \boldsymbol{w}$$

1. $r(\overrightarrow{PQ},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = 3 \neq r(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = 2 \iff$ las rectas se cruzan.
2. $r(\overrightarrow{PQ},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = r(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = 2 \iff$ las rectas son secantes.
3. $r(\overrightarrow{PQ},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = 2 \neq r(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = 1 \iff$ son paralelas distintas.
4. $r(\overrightarrow{PQ},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = 1 = r(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) \iff$ rectas coincidentes.

Recta-plano

$$\Pi = Ax + By + Cz + D = O; \qquad r = \begin{cases} \Pi_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = O \\ \Pi_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = O \end{cases} \quad r\begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix} = 2;$$

$$M_c = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}; \qquad M_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

1. $r(M_c) = 3 = r(M_a) \iff \exists P = r \cap \Pi$.
2. $r(M_c) = 2 \neq r(M_a) = 3 \iff r // \Pi$.
3. $r(M_c) = 2 = r(M_a) \iff r \in \Pi$.

Productos entre vectores

Producto escalar

De modo análogo al plano,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x^1, x^2, x^3) \cdot U \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = x_1y^1 + x_2y^2 + x_3y^3$$

donde

$$U=(u_{ij})_{3\times 3}/u_{ij}=\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j, \quad i, j=1, 2, 3$$

Producto vectorial

Sea $V(\mathfrak{R})$ un espacio vectorial euclidiano de dimensión 3.

$$\begin{aligned} V_3\times V_3 &\xrightarrow{\ \wedge\ } V_3 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\longrightarrow \boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}/(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \text{ familia libre; } \boldsymbol{w} \text{ único,} \end{aligned}$$

que cumple:

1. $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}=O$ y $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{w}=O$.
2. La terna $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w})$ es de orientación positiva.
3. $|\boldsymbol{w}|=|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|\cdot\text{sen}\,(\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}})=|$área del paralelogramo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$.
4. $\boldsymbol{x}\wedge(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{z}$
5. $\lambda(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})=(\lambda\boldsymbol{x})\wedge\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\wedge(\lambda\boldsymbol{y})$ $\Big\}$ Bilineal
6. $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=-(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})$ Antisimétrica.

Expresión analítica

Siendo $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ una base ortonormada de $V_3(\mathfrak{R})$,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1&=\boldsymbol{u}_2\wedge\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{u}_2&=\boldsymbol{u}_3\wedge\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_3&=\boldsymbol{u}_1\wedge\boldsymbol{u}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(nemotécnicamente): } \boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Producto mixto o triple producto escalar

En un espacio vectorial euclidiano $V_3(\mathfrak{R})$ se define:

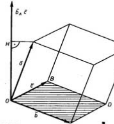
$$\begin{aligned} V_3\times V_3\times V_3 &\xrightarrow{\ D\ } \mathfrak{R} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &\longrightarrow \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}), \text{ que cumple:} \end{aligned}$$

1. D es trilineal y antisimétrica.
2. D es una función determinante, cuyo valor en cualquier base ortonormada es 1.
3. Indicando por $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}) \Rightarrow$ el volumen del paralelogramo definido por la terna $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ es: $V=|\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z})|=|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})|$, y el signo de ese determinante da la orientación de la terna.

Expresión analítica

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$|\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\text{sen}\,(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}})=$Area $OBDCO$.



$(a, b, c)=a\cdot(b\wedge c)=|a|\cdot|b\wedge c|\cdot$
$\cdot\cos\,(\widehat{a, b\wedge c})=|b\wedge c|\cdot\overline{OH}=$ Area $OBDCO$. $\overline{OH}=$ Volumen del paralelepípedo.

Identidad del "doble" producto vectorial

Sea (u_1, u_2, u_3) base ortonormada de un $V_3(\mathfrak{R})$

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_1 u_1\\ y&=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2\\ z&=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3\end{aligned}\right. \Rightarrow x\wedge(y\wedge z)=\begin{vmatrix} y & z\\ x\cdot y & x\cdot z\end{vmatrix}$$

Identidad de Lagrange

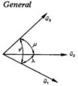
$$(x\wedge y)\cdot(z\wedge t)=\begin{vmatrix} x\cdot z & x\cdot t\\ y\cdot z & y\cdot t\end{vmatrix}$$

Espacio euclidiano

Espacio euclidiano es un espacio afín real, cuyo espacio vectorial es euclidiano. Sus características, por consiguiente, son análogas a las del plano euclidiano, con la diferencia de una coordenada más y la introducción de los productos vectorial y mixto.

Bases en el sistema de referencia (O, u_1, u_2, u_3).

General



$$U=\begin{pmatrix} |u_1|^2 & |u_1|\cdot|u_2|\cdot\cos\lambda & |u_1|\cdot|u_2|\cdot\cos\nu\\ |u_1|\cdot|u_2|\cdot\cos\lambda & |u_2|^2 & |u_2|\cdot|u_3|\cdot\cos\mu\\ |u_1|\cdot|u_3|\cdot\cos\nu & |u_2|\cdot|u_3|\cdot\cos\mu & |u_3|^2\end{pmatrix}$$

Normada

$|u_1|=|u_2|=|u_3|=1$

$$U=\begin{pmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\nu\\ \cos\lambda & 1 & \cos\mu\\ \cos\nu & \cos\mu & 1\end{pmatrix}$$

Ortogonal

$\lambda=\mu=\nu=\dfrac{\pi}{2}$

$$U=\begin{pmatrix} |u_1|^2 & 0 & 0\\ 0 & |u_2|^2 & 0\\ 0 & 0 & |u_3|^2\end{pmatrix}$$

Ortonormada

$|u_i|=1,\ i=1, 2, 3$

$\lambda=\mu=\nu=\dfrac{\pi}{2}$

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

En lo que sigue, se designarán con letras minúsculas los vectores posicionales de puntos representados por las correspondientes letras mayúsculas.

Ecuaciones vectoriales

Plano Π, *definido por un punto A y una orientación* $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{n} \perp \Pi)$

Para cualquier $X \in \Pi$: $\overrightarrow{AX}\cdot\boldsymbol{n}=0 \Rightarrow \Pi\equiv(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}=0.$

Plano Π, *definido por tres puntos A, B, C*

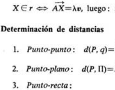
$\Pi\equiv(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\wedge(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})]=0$, de orientación $\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\wedge(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$.

Recta r, *definida por un punto A y una dirección* $\boldsymbol{v}$

$X\in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AX}=\lambda\boldsymbol{v}$, luego: $r\equiv(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\wedge\boldsymbol{v}=0.$

Determinación de distancias

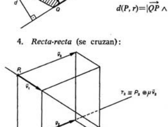
1. *Punto-punto*: $d(P, q)=|\overrightarrow{PQ}|=+\sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}.}$
2. *Punto-plano*: $d(P,\Pi)=\overrightarrow{PQ}\cdot\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\Big/\boldsymbol{n}\perp\Pi;\ \forall Q\in\Pi.$
3. *Punto-recta*:



Area del paralelogramo $(\overrightarrow{QP},\ \boldsymbol{v})=|\boldsymbol{v}|\cdot h=|\overrightarrow{QP}\wedge\boldsymbol{v}|.$

$d(P, r)=|\overrightarrow{QP}\wedge\cdot\dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}|.$

4. *Recta-recta* (se cruzan):



$d(r_1, r_2)=\dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2)}{|\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2|}$ (mínima).

5. $\left.\begin{array}{l}\textit{Plano-plano}\\ \textit{Recta-recta}\\ \textit{Recta-plano}\end{array}\right\}$ *paralelos*, se reducen a los casos $\left\{\begin{array}{l}2\\ 3,\\ 2\end{array}\right.$ anteriores.

Area del triángulo de vértices A, B, C=Area$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$.

Volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D: $V=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

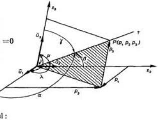
Determinación de ángulos

1. *Recta-recta:* Es igual al de vectores direccionales (o normales) respectivos.
2. *Recta-plano:* Es el complementario del formado por uno direccional de la recta y uno normal al plano.
3. *Plano-plano:* Es igual al de los vectores normales respectivos.

Angulos directores de una recta r

Son los que forma la recta con los ejes del sistema de referencia.
La relación entre los cosenos de esos ángulos, llamados *cosenos directores*, es para cualquier recta:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\nu & \cos\alpha \\ \cos\lambda & 1 & \cos\mu & \cos\beta \\ \cos\nu & \cos\mu & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}=0$$



En el caso de una base ortogonal:

$$\lambda=\mu=\nu=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

Consecuentemente, en una base ortogonal, un *vector unitario* direccional de una recta es el $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Ecuación normal de un plano

$\Pi \equiv x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma+d=0$, siendo $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ los cosenos directores de la perpendicular trazada al plano por el origen.

De la ecuación general $\Pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$, y llamando $k=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, $\Rightarrow \cos\alpha=\frac{A}{k}$; $\cos\beta=\frac{B}{k}$; $\cos\gamma=\frac{C}{k}$, y $d=\frac{-D}{k}$ (distancia al origen).

Angulo φ de dos direcciones r_1 y r_2

Viene dado por

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\nu & \cos\alpha_1 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\mu & \cos\beta_1 \\ \cos\nu & \cos\mu & 1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & \cos\varphi \end{vmatrix} = 0$$

Si la base es ortogonal, $\lambda=\mu=\nu=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$
$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2$.

Cambio del sistema de referencia

Véase el problema 5.15.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.1. *Sean* $A(1, 0, 1)$; $\Pi_1 \equiv x+2y-z+4=0$; $\Pi_2 \equiv 2x+y+2z+1=0$

$$r_1 \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-z+7=0 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} 2x+y+z-6=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad r_3 \equiv \begin{cases} 2y-z+3=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$$

Se pide: *a) recta que pasa por A y se apoya en r_1 y r_2;*
b) recta que pasa por A y es paralela a Π_1, apoyándose en r_1;
c) recta que se apoya en r_1 y r_2, siendo paralela a r_3.

a) Planos que pasan por r_1: $(1+2\lambda)x-2y+(1-\lambda)z+7=0$.
Obligando a que pase por A: $1+2\lambda-0+1-\lambda+7\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1/4$.
Plano $A+r_1$: $2x-8y+5z-7=0$.
Planos que pasan por r_2: $2x+y-z-6+\lambda(x-y)=0$.
Para que pase por A: $2+\lambda+0+1-6=0 \Rightarrow \lambda=3$.
Plano $A+r_2$: $5x-2y+z-6=0$.
La recta pedida es: $r \equiv \begin{cases} 2x-8y+5z-7=0 \\ 5x-2y+z-6=0. \end{cases}$

b) Por lo visto en el apartado anterior, plano $A+r_1$: $2x-8y+5z-7=0$.
Planos paralelos a Π_1: $x+2y-z+4+\lambda=0$.
Obligando a que pase por A: $1+0-1+4+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-4$.
El plano, entonces, es: $x+2y-z=0$.
La recta pedida es la intersección de los planos: $s \equiv \begin{cases} 2x-8y+5z-7=0 \\ x+2y-z=0. \end{cases}$

c) Planos que pasan por r_1: $(1+2\lambda)x-2y+(1-\lambda)z+7\lambda=0$.

Un vector direccional de r_3 es: $\mathbf{v}_3=\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)=$
$=(2, -1, -2)$.
Condición de paralelismo con r_3: $2(1+2\lambda)+2-2(1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-1/3$.
Plano que pasa por r_1 y es paralelo a r_3: $x-6y+4z-7=0$.
Planos que pasan por r_2: $(2+\lambda)x+(1-\lambda)y+z-6=0$.

Un vector de orientación de ellos es: $(2+\lambda,\ 1-\lambda,\ 1)=\boldsymbol{n}$.
Condición de paralelismo con r_3: $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_3=0=2(2+\lambda)-(1-\lambda)-2=0 \Rightarrow =-1/3$.
El plano que pasa por r_2 y es paralelo a r_3 es: $5x+4y+3z-18=0$.
La recta pedida es: $m=\begin{cases} x-6y+4z-7=0 \\ 5x+4y+3z-18=0 \end{cases}$

5.2. *Con los mismos datos del ejercicio anterior, averígüense las posiciones relativas siguientes:*

a) r_1 *y* r_2; b) r_1 *y* Π_3; c) Π_1, Π_2 y $\Pi=3y-4z+8=0$.

a) $\boldsymbol{v}_1=\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right)=(2, 3, 4)$

$\boldsymbol{v}_2=\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)=(1, 1, -3)$

Un punto cualquiera de r_1 es $P_1\left(0,\ \frac{7}{2},\ 7\right)$
Un punto cualquiera de r_2 es $P_2(2,\ 2,\ 0)$ $\Bigg\}\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=\left(2,\ -\frac{3}{2},\ -7\right)$.

Entonces, $r(\overrightarrow{P_1P_2},\ \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)=r\begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}=3 \Rightarrow r_1$ y r_2 se cruzan.

b)

$$r\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}=3 \Rightarrow r_1\cap\Pi_3=P(39,\ -17,\ -31).$$

c)

$$r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}=2\neq r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}=3.$$

Además, $r(\Pi_1, \Pi_2)=2$; $r(\Pi_1, \Pi)=2$ y $r(\Pi_2, \Pi)=2$. Por consiguiente, se cortan dos a dos (véase figura en la página 151).

5.3. Sean $A(1, 0, 2)$; $B(0, -2, 1)$; $r=\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x-y+z+4=0 \end{cases}$; $s=\dfrac{x+2}{-1}=$
$=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{0}$.

Se pide: a) *Plano que pasa por* A *y* B, *siendo paralelo a* r.
b) *Plano que pasa por* r *y es paralelo a* s.
c) *Plano que pasa por* A, *siendo paralelo a* r *y a* s.

a) Todos los planos que pasan por r son: $x-2y+z-1+\lambda(2x-y+z+4)=0$.
Para que sean paralelos a r: $x-2y+z-1+\lambda(2x-y+z+4)+\mu=0$.
Obligando a que pase por A: $2+\lambda(8)+\mu=0$
Obligando a que pase por B: $4+\lambda(7)+\mu=0$ $\Big\}\Rightarrow \lambda=2;\ \mu=-18$.
El plano pedido es: $5x-4y+3z-11=0$.

b) Todos los planos que pasan por r son: $(1+2\lambda)x+(-2-\lambda)y+(1+\lambda)z-$ $-1+4=0$.

Un vector de orientación de ellos es: $\boldsymbol{n}=(1+2\lambda,\ -2-\lambda,\ 1+\lambda)$.

Pero $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{v}=(-1,\ 1,\ 0)$, direccional de $s \Rightarrow 0=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=-1-2\lambda-2-\lambda \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda=-1$.

El plano pedido es $x+y+5=0$.

c) Según el enunciado, será un plano paralelo al del anterior apartado, luego es de la forma $x+y+5+\lambda=0$. Obligándole a que pase por A, $1+0+5+$ $+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-6 \Rightarrow \Pi=x+y-1=0$.

Otro modo de resolución es: Sea el plano buscado $\Pi=Ax+By+Cz+D=0$.

$\Pi//r \Rightarrow -A+B+3C=0$, pues $\boldsymbol{v}_r=\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right)=$ $=(-1,\ 1,\ 3)$.

$\Pi//s \Rightarrow -A+B=0$, ya que $\boldsymbol{v}_s=(-1,1,0)$.

$A\in\Pi \Rightarrow A+2C+D=0$.

Para que el sistema sea compatible,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+y-1=0$$

De modo análogo a este último se podía haber hecho el apartado *a*.

5.4. *Siendo* $\boldsymbol{x}=(3,\ -2,\ 1)$; $\boldsymbol{y}=(1,\ -3,\ 5)$; $\boldsymbol{z}=(2,\ 1,\ -4)$,

a) *calcúlese* $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\wedge(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$;
b) *dedúzcase qué figura forman* $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\}$;
c) *pruébese que* $\boldsymbol{x}\wedge(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z})\neq(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})\wedge\boldsymbol{z}$.

a) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\wedge(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\\ 4 & -5 & 6\\ 2 & 1 & -4\end{vmatrix}=14\boldsymbol{u}_1+28\boldsymbol{u}_2+14\boldsymbol{u}_3=14(1,\ 2,\ 1).$

b) $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z})=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 5\\ 2 & 1 & -4\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ son coplanarios. Además,

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \Rightarrow$ forman triángulo; y como $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}=(3,\ -2,\ 1)(2,\ 1,\ -4)=0 \Rightarrow$ triángulo rectángulo.

c) Aplicando la identidad del doble producto vectorial,

$$\boldsymbol{x}\wedge(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}\end{vmatrix}=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})\cdot\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{z}=0-14\boldsymbol{z}=-14\cdot\boldsymbol{z}.$$

$$(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})\wedge\boldsymbol{z}=-\boldsymbol{z}\wedge(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y}\end{vmatrix}=(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}=$$

$$=0-21\boldsymbol{x}=-21\cdot\boldsymbol{x}.$$

5.5. *Demuéstrese:* $\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{y} \wedge (\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z} \wedge (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$.

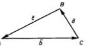
Aplicando la identidad del doble producto vectorial,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y} \wedge (\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{x}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} - (\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \wedge (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})\boldsymbol{y} \end{aligned}\right\} \text{Sumando, miembro a miembro, resulta el enunciado.}$$

5.6. *Demuéstrese que:* $(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}) - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

Llamemos $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{t}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{z} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t} \end{vmatrix} &= \boldsymbol{z}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{z}) = \\ &= \boldsymbol{z}[(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{t}] - \boldsymbol{t}[(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}] \quad \text{(simetría producto escalar)} \\ &= \boldsymbol{z}[\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})] - \boldsymbol{t}[\boldsymbol{z}\cdot(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})] \quad \text{(producto mixto)} \\ &= \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \text{(rotación cíclica)} \\ &= \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \end{aligned}$$



5.7. *Dedúzcase el teorema de los senos en un triángulo plano.*

Se tiene $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.
Multiplicando esta igualdad sucesiva y vectorialmente por $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$$

Luego, ab sen $C = ca$ sen $B = bc$ sen $A \Rightarrow \dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C}$

5.8. *En el sistema de referencia* $(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, *dado por* $|\boldsymbol{u}_1| = 2$; $|\boldsymbol{u}_2| = 1$; $|\boldsymbol{u}_3| = 3$; $\lambda = \dfrac{\pi}{3}$ *rad*; $\mu = \nu = \dfrac{\pi}{2}$ *rad, se pide:*

a) *Plano que pasa por* $A(1, 1, 1)$ *y es ortogonal a* $r \equiv \dfrac{x^1 - 2}{2} = \dfrac{x^2 - 1}{1} = \dfrac{x^3}{0}$.

b) *Distancia entre los planos* $\Pi_1 \equiv 3x^1 + 2x^2 - x^3 + 1 = 0$ *y* $\Pi_2 \equiv 6x^1 + 4x^2 - 2x^3 + 13 = 0$.

c) *Distancia entre las rectas:* $r_1 \equiv \dfrac{x^1 - 2}{-1} = \dfrac{x^2 - 3}{2} = \dfrac{x^3 - 1}{1}$ *y* $r_2 \equiv (1, 2, 3) \oplus \lambda(-1, 2, 1)$.

a) La matriz fundamental es $U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

El vector $\boldsymbol{v}=(2, 1, 0)$ es un direccional de la recta r (en contravariantes); y como plano $\perp r \Rightarrow \boldsymbol{n}=\boldsymbol{v} \perp \Pi$, se puede tomar $\boldsymbol{n}=(2, 1, 0)$.

$$\Pi \equiv (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x^1-1 \\ x^2-1 \\ x^3-1 \end{pmatrix}=0 \text{ luego } \Pi \equiv 3x^1+x^2-4=0$$

b) $\boldsymbol{n}_1=(3, 2, -1)=\frac{1}{2}(6, 4, -2)=\frac{1}{2}\boldsymbol{n}_2 \Rightarrow \Pi_1 // \Pi_2$.

Se elige un punto cualquiera $P \in \Pi_1$, por ejemplo, el $P(0, 1, 3)$. Entonces,

$$d(P, \Pi_2)=\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_2|} \Big/ Q \in \Pi_2 \qquad [1]$$

Q puede ser cualquiera, por ejemplo, el $Q(0, 0, 13/2)$. Con él, $\overrightarrow{PQ}= =\left(0, -1, \frac{7}{2}\right)$, en contravariantes; y $\boldsymbol{n}_2=(6, 4, -2)$ en covariantes.

Como $|\boldsymbol{u}_2|^2=(6, 4, -2)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}=(6, 4, -2)\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right]$
$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{160}{9}$.

Luego $|\boldsymbol{u}_2|=\frac{4}{3}\sqrt{10}$. Sustitupendo en [1], y teniendo en cuenta que el producto escalar es conmutativo,

$$d(P, \Pi_2)=\frac{\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_2|}\cdot PQ=\frac{3}{4\sqrt{10}}\cdot\left[(6, 4, -2)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}\right]=-\frac{33}{4\sqrt{10}}=d(\Pi_1, \Pi_2)$$

c) Como $\boldsymbol{v}_1=(-1, 2, 1)=\boldsymbol{v}_2$ (en contravariantes), son de rectas paralelas, análogamente al apartado anterior, se elige un punto cualquiera en cada una de las rectas: $P_1(2, 3, -1) \in r_1$; $P_2(1, 2, 3) \in r_2$:

$$d(P_1, r_2)=\left|\overrightarrow{P_2P_1}\wedge\frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|}\right|=\left|(1, 1, -4)\wedge\frac{(-1, 2, 1)}{|\boldsymbol{v}_2|}\right|$$

Como $|\boldsymbol{v}_2|^2=(-1, 2, 1)\cdot U\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=13 \Rightarrow |\boldsymbol{v}_2|=\sqrt{13}$. Entonces,

$$d(P_1, r_2)=\text{módulo del vector}\left\{\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ 1 & 1 & -4 \\ \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{vmatrix}\right\} \quad \left|\left(\frac{9}{13}, \frac{5}{13}, \frac{3}{13}\right)\right|=$$
$$=\frac{2}{13}\sqrt{130}.$$

La distancia hallada es la pedida, $d(r_1, r_2)$.

5.9. *Realícense los apartados b y c del problema anterior, suponiendo la base de referencia ortonormada.*

b') $d(P, \Pi_2)=\overrightarrow{PQ}\cdot\dfrac{\boldsymbol{u}_2}{|\boldsymbol{u}_2|}=\left(0, -1, \dfrac{7}{2}\right)\cdot\left[\dfrac{1}{\sqrt{56}}(6, 4, -2)\right]=-\dfrac{11}{\sqrt{56}}=$
$=d(Q, \Pi_1)=d(\Pi_1, \Pi_2).$

c') $$d(P_1, r_2)=\left[(1, 1, -4)\wedge\frac{(-1, 2, 1)}{\sqrt{6}}\right]=\text{módulo}\left\{\left|\begin{matrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\\ 1 & 1 & -4\\ \dfrac{-1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{matrix}\right|\right\}=$$

$$=|(9/\sqrt{6},\ 5/\sqrt{6},\ 3/\sqrt{6})|=\frac{115}{6}=d(P_2, r_1)=d(r_1, r_2)$$

5.10. *En el sistema de referencia dado por* $(O, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, $|\boldsymbol{u}_1|=|\boldsymbol{u}_2|=|\boldsymbol{u}_3|=1$; $\lambda=\pi/3$ *rad*; $\mu=\pi/2$ *rad*; $\nu=\text{arc cos}\ \dfrac{1}{3}$, *se pide:*

a) *Angulo de la recta* $r_1\equiv\dfrac{x^1-1}{2}=\dfrac{x^2+2}{-1}=\dfrac{x^3-1}{1}$, *con el plano* $\Pi_1\equiv x^1-2x^2+x^3-1=0.$

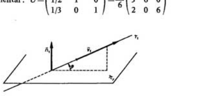
b) *Angulo entre los planos* $\Pi_2\equiv 2x^1-2x^2-x^3=0$ *y el* Π_1 *anterior.*

c) *Distancia entre las rectas* $r_2\equiv\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2=0\end{cases}$ *y la* r_1 *anterior.*

d) *Angulo formado por las rectas*

$$r\equiv\begin{cases}2x_1-x_2-1=0\\ 3x_2-2x_3-3=0\end{cases}\quad y\quad s\equiv\frac{x_1-2}{-1}=\frac{x_2-3}{2}=\frac{x_3-3}{0}$$

a) Matriz fundamental: $U=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1 & 0\\ 1/3 & 0 & 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 0\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$



sen $\varphi=\cos(\widehat{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{n}_1})=\dfrac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{v}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}.$

$\boldsymbol{v}_1=(2, -1, 1)$ en contravariantes.

$\boldsymbol{n}_1=(1, -2, 1)$ en covariantes.

$$|\boldsymbol{v}_1|^2=(2, -1, 1)\cdot U\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=16/3;\qquad |\boldsymbol{n}_1|^2=(1, -2, 1)\cdot U^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}=\frac{143}{23}.$$

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}{\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{143}{23}}}=\frac{(1,-2,1)\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}{4\sqrt{\frac{143}{69}}}=\frac{5}{4}\sqrt{\frac{69}{143}};\qquad \varphi=\operatorname{arc\,sen}\frac{5}{4}\sqrt{\frac{69}{143}}$$

b) $\boldsymbol{n}_2=(2,-2,-1)$ en covariantes $\Rightarrow |\boldsymbol{n}_2|^2=(2,-2,-1)\cdot U^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}=\frac{49}{23}$

$$\cos(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{(1,-2,1)\cdot U^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{143}{23}}\cdot\frac{7}{\sqrt{23}}}=\frac{169}{7\sqrt{143}}$$

c) $\boldsymbol{v}_1=(2,-1,1)$ en contravariantes;

$\boldsymbol{v}_2=\left(\begin{vmatrix}-3&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-3\\2&1\end{vmatrix}\right)=(-1,2,7)$ en covariantes.

Un punto $P_1\in r_1$ es $P_1(1,-2,1)$ en contravariantes.
Un punto $P_2\in r_2$ es $P_2(1,-2,-6)$ en covariantes.

$\boldsymbol{v}_2=(-1,2,7)\cdot U^{-1}=\frac{1}{23}(-300,124,213);$

$P_2=(1,-2,-6)\cdot U^{-1}=\left(\frac{144}{23},-\frac{118}{23},-\frac{186}{23}\right).$

De esta manera se tienen los datos operacionales en contravariantes $r(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=3\Rightarrow$ las rectas se cruzan.

$$d(r_1,r_2)=\frac{(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}{\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2}=\frac{\frac{1}{23}(121,-72,232)\cdot U\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_1&\boldsymbol{u}_2&\boldsymbol{u}_3\\2&-1&1\\-\frac{300}{23}&\frac{124}{23}&\frac{213}{23}\end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2|}=13{,}4679$$

d) $\boldsymbol{v}_r=\left(\begin{vmatrix}-1&0\\3&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&2\\-2&0\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}2&-1\\0&3\end{vmatrix}\right)=(2,4,6)$ en covariantes. En su lugar, puede tomarse el $\boldsymbol{v}'_r=(1,2,3)$.

$\boldsymbol{v}_s=(-1,2,0)$, también en covariantes.

$$|\boldsymbol{v}'_r|^2=(1,2,3)\cdot U^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{335}{23};\quad |\boldsymbol{v}_s|^2=(-1,2,0)\cdot U^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\frac{152}{23}$$

$$\cos\varphi=\frac{(1,2,3)\cdot U^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{335}{23}}\cdot\sqrt{\frac{152}{23}}}=\frac{164}{\sqrt{152}\cdot\sqrt{335}}$$

5.11. *Realícese el problema que precede, suponiendo la base ortonormada.*

a') $\boldsymbol{v}_1=(2,-1,1)$; $\boldsymbol{n}_1=(1,-2,1)$

$$\operatorname{sen}\varphi=\cos(\widehat{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{n}_1})=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{v}_1|}=\frac{(1,-2,1)\cdot(2,-1,1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{5}{6};\quad \varphi=\operatorname{arc\,sen}\frac{5}{6}$$

b') $$\cos(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{(1,-2,1)\cdot(2,-2,-1)}{\sqrt{6}\cdot 3}=\frac{5}{3\sqrt{6}};$$

$$\varphi'=\operatorname{arc\,sen}\frac{5}{3\sqrt{6}}$$

c') $\boldsymbol{v}_1=(2,-1,1)$; $\boldsymbol{v}_2=(-1,2,7)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Un punto cualquiera de } r_1 \text{ es } P_1(1,-2,1)\\ \text{Un punto cualquiera de } r_2 \text{ es } P_2(1,-2,-6)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=(0,0,-7)$$

$$r(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=r\begin{pmatrix}0&0&-7\\2&-1&1\\-1&2&7\end{pmatrix}=3\Rightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan, resultado que ya}$$

salió antes. Entonces:

$$d(r_1,r_2)=\frac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2)}{|\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2|}=\frac{(0,0,-7)\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1&\boldsymbol{u}_2&\boldsymbol{u}_3\\2&-1&1\\-1&2&7\end{pmatrix}}{\text{módulo de}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1&\boldsymbol{u}_2&\boldsymbol{u}_3\\2&-1&1\\-1&2&7\end{pmatrix}}=$$

$$=\frac{(0,0,-7)\cdot(-9,-10,3)}{|(-9,-10,3)|}=\frac{-21}{\sqrt{190}}=d(r_1,r_2)$$

d') $\boldsymbol{v}_r=(2,4,6)=2\cdot(1,2,3)$; $\boldsymbol{v}_s=(-1,2,0)$

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{v}_r'|\cdot|\boldsymbol{v}_s|}{\boldsymbol{v}_r'\cdot\boldsymbol{v}_s}=\frac{(1,2,3)\cdot(-1,2,0)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{70}};\quad \varphi=\operatorname{arc\,cos}\frac{3}{\sqrt{70}}$$

5.12. *Considérense el punto C(2, 1, 0) y las hipótesis del problema 5.3. Se pide:*

a) *Plano definido por los puntos A, B y C.*
b) *Plano determinado por el punto A y la recta s.*
c) *Plano perpendicular a s, por el punto A.*
d) *Area del triángulo ABC.*
e) *Volumen del tetraedro formado por el plano ABC y el origen de coordenadas.*

a) $$\begin{vmatrix}x&y&z&1\\1&0&2&1\\0&-2&1&1\\2&1&0&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 5x-3y+z-7=0$$

b) $$s\equiv\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}z-2=0 & (\Pi_1//OXY)\\ x+y+1=0 & (\Pi_2//OZ)\end{cases}$$

Es decir, se ha desglosado s en dos ecuaciones de planos proyectantes.
Todos los planos que pasan por s son: $z-2+\lambda(x+y+1)=0$.
Obligando a que pase por A: $0+\lambda(1+0+1)=0 \Rightarrow \lambda=0$.
El plano pedido es: $\Pi \equiv z-2=0$.

c) Un vector direccional de la recta s es: $\boldsymbol{v}=(-1, 1, 0)$. Como $s \perp \Pi$, se puede tomar $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}=(-1, 1, 0) \perp \Pi$. Entonces,

$$\Pi \equiv (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}=0 \Rightarrow (x-1, y, z-2)\cdot(-1, 1, 0)=-x+y+1=0$$

En definitiva, $\Pi \equiv x-y-1=0$.

d) $\text{Area}=\frac{1}{2}|AB \wedge AC|=\frac{1}{2}\cdot\text{módulo de} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}|(5, -3, 1)|=$
$=\frac{1}{2}\sqrt{35}\,u^2$

e) $V=\frac{1}{3}\cdot\text{área base}\cdot h=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{35}\right)\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{35}\ \frac{7}{\sqrt{35}}=\frac{7}{6}u^3$.

Esto es así, pues si $\Pi \equiv 5x-3y+z=0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{35}}x-\frac{1}{\sqrt{35}}y+\frac{7}{\sqrt{35}}z-\frac{7}{\sqrt{35}}=0$, es su ecuación en forma normal, y, por tanto, $h=|d(0, \Pi)|=$ $=7/\sqrt{35}$.

También podía haberse hecho del siguiente modo:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{7}{6}u^3.$$

5.13. *Con los mismos planteamientos del problema 5.1, calcúlense:*

a) *Recta ortogonal a Π_1 y pasa por A.*
b) *Recta que, pasando por A, es paralela a r_1.*
c) *Recta perpendicular a r_1 por el punto A.*
d) *Recta que pasa por A y es paralela a los planos Π_1 y Π_2.*

a) $\boldsymbol{n}_1=(1, 2, -1) \Rightarrow$ un vector direccional de la recta es $\lambda(1, 2, -1)$.
Su ecuación es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

b) Un vector direccional será el mismo que el de r_1.

$$\boldsymbol{v}_1=\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) \Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}.$$

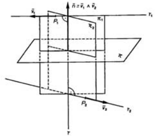
c) En primer lugar, el plano $A+r_1$ es $2x-8y+5z-7=0$ (véase el problema 5.1).

Por otra parte, como $v_1=(2,3,4)$ es direccional de $r_1 \Rightarrow$ el plano ortogonal a r_1, pasando por A, será: $(x-a)\cdot n=0=(x-1)\cdot 2+y\cdot 3+(z-1)\cdot 4$.

La recta pedida es la intersección de ambos planos: $\begin{cases} 2x-8y+5z-7=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$

d) Si es paralela a los planos Π_1 y Π_2, lo será a $r=\Pi_1 \cap \Pi_2$, que tiene un vector direccional $v=\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)=(5,-4,-3)$. La recta es: $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-1}{-3}$.

5.14. *Hállese, si procede, la perpendicular común a las rectas r_1 y r_2 del problema 5.1. Según se vio en el problema 5.2, apartado a, las rectas r_1 y r_2 se cruzan. El procedimiento geométrico consiste en hallar un plano Π, paralelo a las dos rectas dadas, y trazar luego, por cada una de ellas, otro plano ortogonal al hallado (α, β). La intersección, $\alpha \cap \beta$, de estos dos últimos planos define la recta pedida*



Como $\Pi//r_1$ y $\Pi//r_2$, un vector de orientación de Π será $n=v_1 \wedge v_2$, que en nuestro caso es:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-13, 10, -1)$$

El plano α viene definido por: un punto $P_1\left(-\dfrac{7}{3}, 0, \dfrac{7}{3}\right)\in r_1$ y dos vectores de posición v_1 y $n\cdot(\Pi \perp \Pi_1)$, por lo que $\alpha=P_1+\lambda_1 v_1+\mu_1 n$.

Análogamente, $\beta=P_2+\lambda_2 v_2+\mu_2 n/P_2(2,2,0)$.

Entonces:

$$\alpha=\begin{vmatrix} x+7/3 & y & z-7/3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -13 & 10 & -1 \end{vmatrix}=0; \qquad \beta=\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & -3 \\ -13 & 10 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Y la recta pedida es: $r=\begin{cases} \alpha=43x+50y-59z+231=0 \\ \beta=29x+40y+23z-140=0 \end{cases}$

5.15. *Sea el sistema de referencia rectangular OXYZ. Se considera otro, OX'Y'Z', también rectangular, que cumple:*

1) $\widehat{OX', OX}=\alpha_1=arc\cos\frac{1}{3}$ 4) $\widehat{OZ', OX}=\alpha_3>\frac{\pi}{2}$

2) $\widehat{OY', OX}=\alpha_2=\frac{\pi}{2}$ 5) $\widehat{OY', OZ}=\gamma_2<\frac{\pi}{2}$

3) $\widehat{OY', OY}=\beta_2=arc\cos\frac{1}{2}$ 6) $\widehat{OX', OZ}=\gamma_1<\frac{\pi}{2}$

Hállense las fórmulas de transformación.

Formando la tabla de los cosenos directores de los nuevos ejes, respecto de los antiguos

	OX	OY	OZ
OX'	$\cos\alpha_1$	$\cos\beta_1$	$\cos\gamma_1$
OY'	$\cos\alpha_2$	$\cos\beta_2$	$\cos\gamma_2$
OZ'	$\cos\alpha_3$	$\cos\beta_3$	$\cos\gamma_3$

$\Longrightarrow$

	OX	OY	OZ
OX'	$1/3$	$\cos\beta_1$	$\cos\gamma_1>0$
OY'	0	$1/2$	$\cos\gamma_2>0$
OZ'	$\cos\alpha_3<0$	$\cos\beta_3$	$\cos\gamma_3$

1. $\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1 \Rightarrow \frac{1}{4}+\cos^2\gamma_2-1=0$. Entonces, $\cos\gamma_2=$ $=+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $$\left.\begin{array}{l}\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1-1=0\\ \cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2=0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\frac{1}{9}+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1\\ 0+\frac{1}{2}\cos\beta_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma_1=0\end{array}\right\}$$

$\cos\gamma_1=+\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\cos\beta_1=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

3. Teniendo en cuenta que α_1, α_2, α_3 son los ángulos que forma la recta OX con los ejes rectangulares $OX'Y'Z'$, se verifica también:

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1 \Rightarrow \frac{1}{9}+\cos^2\alpha_3=1;\quad \cos\alpha_3=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

4. Por igual motivo que el anterior, ocurre que

$$\cos\alpha_1\cdot\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cdot\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cdot\cos\beta_3=0 \Rightarrow \frac{-\sqrt{6}}{9}+$$
$$+0-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\beta_3=0 \Rightarrow \cos\beta_3=\frac{-\sqrt{3}}{6}$$

5. Análogamente,

$$\cos\alpha_1\cdot\cos\gamma_1+\cos\alpha_2\cdot\cos\gamma_2+\cos\alpha_3\cdot\cos\gamma_3=0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{9}+$$
$$+0-\frac{2\sqrt{2}}{9}\cos\gamma_3=0 \Rightarrow \cos\gamma_3=\frac{1}{6}$$

En definitiva:

	OX	OY	OZ
OX'	$1/3$	$\frac{-\sqrt{6}}{3}$	$\frac{+\sqrt{2}}{3}$
OY'	0	$1/2$	$\frac{+\sqrt{3}}{2}$
OZ'	$\frac{-2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{6}$	$1/6$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x&=\frac{1}{3}x'-\frac{2\sqrt{2}}{3}z' \\ y&=-\frac{\sqrt{6}}{3}x'+\frac{1}{2}y'-\frac{\sqrt{3}}{6}z' \\ z&=\frac{\sqrt{2}}{3}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'+\frac{1}{6}z' \end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

5.16. Dados los puntos $A(1, 3, 5)$, $B(-2, 7, 3)$, $C(0, 4, 1)$ y los vectores $\boldsymbol{v}=(1, 2, 5)$, $\boldsymbol{w}=(2, -3, 5)$, se pide:

a) Recta definida por los puntos A y C, en todas sus formas afines.
b) Recta determinada por A y $\boldsymbol{w}$.
c) Plano determinado por los puntos A, B y C.
d) Plano definido por el punto B y los vectores $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, en forma cartesiana y paramétrica.

5.17. Estúdiense las posiciones relativas de las siguientes ternas y pares de planos:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=6 \\ x_1+2x_2+x_3=3 \\ 5x_1+x_2-x_3=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-x_2+x_3=2 \\ 2x_1-2x_2+2x_3=4 \\ 3x_1-3x_2+3x_3=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+4x_2-2x_3=2 \\ x_1+x_2+3x_3=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-7x_3=5 \\ x_1-3x_2+4x_3=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-6x_2-3x_3=2 \\ 3x_1-18x_2-9x_3=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1-6x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

Es aconsejable, para los cálculos, usar la notación (x, y, z) en lugar de (x_1, x_2, x_3).

5.18. Hállese la matriz fundamental correspondiente a la base que se indica, con $|\bar{u}_1|=2$, $|\bar{u}_2|=3$, $|\bar{u}_3|=2$.

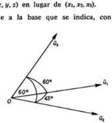
Con esta matriz fundamental, calcúlense:

a) Coordenadas covariantes de $\bar{x}=(3, 1, 0)$.
b) Producto escalar de $\bar{x}=(1, 1, 4)$, $\bar{y}=(0, 1, -2)$.
c) Plano que pasa por $A=(1, 1, 1)$ y perpendicular a la recta

$$\frac{x^1-2}{2}=\frac{x^2}{4}=\frac{x^3-1}{-1}$$

d) Recta que pasa por $A=(3, 0, -2)$ y perpendicular al plano

$$x^1-x^2+3x^3-7=0$$

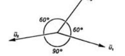


5.19. Con la referencia $|\bar{u}_1|=|\bar{u}_2|=1$, $|\bar{u}_3|=2$ se resolverán los siguientes ejercicios de ángulos:

a) Angulo de las rectas:

$$\frac{x^1-2}{1}=\frac{x^2-0}{3}=\frac{x^3-1}{5},$$

$$\frac{x^1-7}{8}=\frac{x^2-3}{0}=\frac{x^3-5}{-1}$$



b) Angulo de los planos:

$$\begin{cases} x^1-3x^2+2x^3-5=0 \\ 2x^1+x^2-5x^3+4=0 \end{cases}$$

c) Angulo de la recta: $\dfrac{x^1-1}{2}=\dfrac{x^2-2}{-1}=\dfrac{x^3-4}{3}$ con el plano $x^1+4x^2-3x^3+7=0$.

5.20. Con la misma referencia del ejercicio anterior, hállense:

a) Distancia entre los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(1, 0, -2)$.
b) Distancia del punto $A(1, 2, 0)$, al plano $3x^1+x^2-x^3+5=0$.
c) Distancia del punto $A(1, 0, 1)$ a la recta

$$\frac{x^1-0}{2}=\frac{x^2-1}{0}=\frac{x^3-2}{1};$$

d) Distancia entre los dos planos paralelos $x^1-2x^2+3x^3+5=0$ y $2x^1-4x^2+6x^3+7=0$.
e) Distancia entre las rectas paralelas

$$\frac{x^1-2}{1}=\frac{x^2-1}{1}=\frac{x^3+3}{2} \text{ y } \frac{x^1-1}{1}=\frac{x^2+1}{1}=\frac{x^3-0}{2}.$$

5.21. Hállese la mínima distancia entre las dos rectas

$$\frac{x^1-0}{0}=\frac{x^2-1}{1}=\frac{x^3+3}{2}; \qquad \frac{x^1-1}{1}=\frac{x^2+1}{-1}=\frac{x^3-0}{3}$$

y la ecuación de la perpendicular común. (Es aconsejable, para los cálculos, usar la notación (x, y, z).)

5.22. Calcúlese $\bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z})$, para $\bar{x}=(1, 1, 2)$, $\bar{y}=(0, 0, 3)$, $\bar{z}=(0, -1, 2)$.

5.23. Averígüese si $\bar{x}=(0, 1, 2)$, $\bar{y}=(2, -3, 1)$, $\bar{z}=(3, -4, 5)$ son paralelas a un mismo plano. (Hágase uso del triple producto escalar.)

5.24. Calcúlese $(\bar{x}\wedge\bar{y})\cdot(\bar{z}\wedge\bar{t})$, para $\bar{x}=(-1, 0, 1)$, $\bar{y}=(2, -1, 0)$, $\bar{z}=(0, 0, -2)$, $\bar{t}=(1, 1, 2)$.

Calcúlese $(\bar{x}\wedge\bar{y})\wedge(\bar{z}\wedge\bar{t})$, para los mismos vectores.

5.25. Dados los vectores $\bar{x}=(1, 2, 3)$, $\bar{y}=(0, -1, 1)$, $\bar{z}=(1, 1, \lambda)$, determínese el valor de λ con la condición de que sean paralelos a un mismo plano.

5.26. Dados tres vectores $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, de módulo unidad, demuéstrese que el volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores (valor llamado por Staudt "seno del ángulo triedro") vale

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\gamma \\ \cos\lambda & 1 & \cos\mu \\ \cos\gamma & \cos\mu & 1 \end{vmatrix}$$

5.27. Demuéstrese que, si se verifican simultáneamente $(\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{x}\cdot\bar{z})$ y $(\bar{x}\wedge\bar{y}=\bar{x}\wedge\bar{z})$, siendo $\bar{x}\neq 0 \Rightarrow \bar{y}=\bar{z}$; pero que, si se cumple por separado $\Rightarrow \bar{y}\neq\bar{z}$.

5.28. Sean los puntos $A(2,1,0)$; $B(1,1,3)$; $C(0,0,2)$ y las rectas $r_1=\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ 2x-3y+4z-1=0 \end{cases}$,

$r_2=\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{1}$; y el plano $\Pi_1=2x-y+3z-4=0$. Se pide:

a) Plano que pasa por B y r_1.
b) Plano paralelo a Π_1, que pasa por A.
c) Plano que pasa por B y C, y es paralelo a r_1.
d) Plano que pasa por C y es paralelo a las rectas r_1 y r_2.

5.29. Con los mismos datos del problema anterior, calcúlense:

a) Recta definida por A, B, en todas sus formas afines.
b) Exprésese r_2, mediante dos planos.
c) Recta paralela a r_1 y que pasa por B.
d) Ecuación normal de Π_1 y cosenos directores de r_1.
e) Plano que pasa por C, B, y es perpendicular a Π_1.

5.30. Sobre los datos del problema 5.28, se pide:

a) Area del triángulo ABC.
b) Volumen del tetraedro formado por Π_1 en su corte con los planos coordenados.
c) Distancia de B a r_1.
d) Distancia de A a Π_1.
e) Angulo que determinan: 1) r_1 y r_2; 2) r_1 y Π_1.

5.31. Se dan: $P(2, -1, 5)$; $\Pi_1 \equiv 2x+3y-4z-6=0$; $\Pi_2 \equiv 3x-y+z-4=0$; $r_1 \equiv \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+4}{-1}$. Calcúlense:

a) Recta que pasa por P y es paralela a los planos Π_1 y Π_2.
b) Posición relativa de las rectas r_1 y $r_2 \equiv \Pi_1 \wedge \Pi_2$.
c) Distancia entre r y r_1.
d) Angulo que forman r_1 y Π_2.

5.32. Con los mismos datos del problema anterior, calcúlense:

a) Plano que pasa por P y es ortogonal a r_1.
b) Plano que pasa por P y es ortogonal a Π_1.
c) Perpendicular común a r y r_1.
d) Recta que pasa por P y es perpendicular a r_1.
e) Plano que pasa por P y es ortogonal a los planos Π_1 y Π_2.
f) Angulo de r y r_1.

5.33. Analícese la posición relativa de los planos $\Pi_1 \equiv x-y+2z=2$; $\Pi_2 \equiv 2x+y-z=0$; $\Pi_3 \equiv x+4y-5z-3=0$.

5.34. Dadas las rectas $r_1 \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z}{-1}$; $r_2 \equiv (0, 2, 0) \oplus (-4, 3, -2)$; $r_3 \equiv \begin{cases} 2x-y+5=0 \\ 5x+z+6=0 \end{cases}$, se pide:

a) Recta que, apoyándose en r_2 y r_3, es paralela a r_1.
b) Recta que pasa por $(2, 3, -2)$ y se apoya en r_2 y r_3.

5.35. Hállese la ecuación del plano que pasa por $r_1 \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$, y forma triedro con $\Pi_1 \equiv y+z=0$; $\Pi_2 \equiv 2x-y+z=3$.

5.36. Hállese el simétrico de $P(1, 2, 3)$, respecto de $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+4}{1}$.

5.37. Se considera un cambio de coordenadas de sistema de referencia ortogonal. Hállense las fórmulas de transformación, si:

$$\cos \beta_1 = \frac{1}{2};\ \cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos \gamma_2 = \frac{1}{2};\ \beta_3 < \frac{\pi}{2};\ \gamma_3 > \frac{\pi}{2}.$$

Determínense las ecuaciones de los planos coordenados antiguos, en el nuevo sistema de referencia.

5.38. Sea r_1 una recta que pasa por el origen y es paralela al subespacio generado por $a=(1, 2, 3)$; y r_2, otra recta que pasa por $(-1, 0, 1)$ y tiene como dirección la del $b=(3, 2, 1)$. Hállese la ecuación de la recta que se apoya en las dos anteriores, y pasa por el punto $(0, 2, -1)$.

5.39. Determínese la ecuación del plano que, pasando por el punto $(1, 3, -5)$, es ortogonal al determinado por $P(1, 0, 3)$ y $r=\begin{cases} x=3z-1 \\ y=-z+2 \end{cases}$, también es ortogonal a la recta $s=\dfrac{x-5}{5}=\dfrac{y+15}{11}=\dfrac{z-1}{-4}$.

5.40. Hállese el punto simétrico del $A(1, 3, 0)$, respecto del plano $\Pi=x+2y+z-1=0$.

5.41. Determínese la ecuación del plano que dista 1 del punto $(3, 2, 1)$, y pasa por $r=\begin{cases} z=0 \\ y=x \end{cases}$

5.42. Dado el plano $\Pi_1=x-y-z+1=0$, proyéctese sobre él la recta $r_1=\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$, en la dirección de $a=(4, -1, 3)$.

5.43. Calcúlense las distancias:

1) Entre los planos $\Pi_1=2x+4y-z+7=0$ y $\Pi_2=4x+8y-2z-1=0$.
2) Entre las rectas $r_1=\begin{cases} 3x-5y-26=0 \\ 2x+5z-3=0 \end{cases}$ y $r_2=(0, -2, 1)\oplus\lambda(3, -4, 4)$.

5.44. Discútase la posición relativa de los planos que se indican, en función de los parámetros a y b:

$$\Pi_1=ax+by+z=1$$
$$\Pi_2=x+aby+z=1$$
$$\Pi_3=x+by+az=1$$

5.45. Determínese el plano que pasa por el punto $A(1, -2, -3)$, es paralelo a la recta $r=(2, -5, 0)\oplus\lambda(3, 4, 5)$, y es ortogonal al plano $\Pi=x+3y+4z-11=0$.

5.46. Hállese el lugar geométrico de los centros de las esferas que pasan por tres puntos fijos.

5.47. Un plano corta a los ejes en puntos que distan una unidad del origen. Determínese el lugar geométrico de todas las rectas que forman un ángulo de $\pi/4$ rad con dicho plano, sabiendo que pasan por el punto $(1, 2, 2)$.

5.48. Determínese el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que, pasando por un punto, son tangentes a una recta.

5.49. Hállese la superficie cónica de revolución con vértice en el origen, eje, $r=x=y=z$, y semiángulo cónico, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ rad.

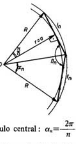
6

Areas y volúmenes

Figuras planas. Descriptiva

Polígono regular

a) Convexo.
b) Equiángulo.
c) Equilátero.
d) Inscriptible.
e) Circunscriptible.



n = número de lados

$l_n = 2 \cdot r \cdot \text{tag}\,\frac{\pi}{n}$

$l_n = 2 \cdot R \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{n}$

$r = a = R \cdot \cos\frac{\pi}{n}$

$$\Big\}\ \text{ángulo central: } \alpha_n = \frac{2\pi}{n}\ \Big\} +$$

$$+ \Big\}\ \text{ángulo del polígono (interior): } \beta_n = \frac{n-2}{n}\pi\ \Big\} = \pi$$

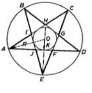
Polígono estrellado o polígono regular cruzado (véanse problemas 6.1 y 6.3).

Areas

Polígono regular ($r=a$)
$S = p \cdot a = r^2 \cdot n \cdot \text{tag}\,\frac{\pi}{n} = R^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{n} = n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \text{cotag}\,\frac{\pi}{n}$

$2p$ = perímetro — r = radio de la circunferencia inscrita — l_n = lado
a = apotema — R = radio circunferencia circunscrita — n = número de lados

Polígono estrellado



$S=p'\cdot a$

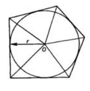
$2p'$ = perímetro aparente. (marcado en la figura)

$OK=a=r$

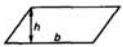
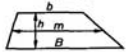
Polígono circunscrito

$S=p\cdot r$

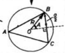
$2p$ = perímetro

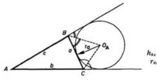


Cuadriláteros

Paralelogramo	Cuadrado	Rombo	Trapecio
			
$S=b.h$	$S=l^2$	$S=2.l.r=\frac{d.D}{2}$	$S=\frac{b+B}{2}.h=m.h$

Triángulos

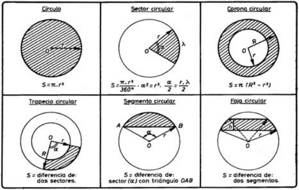
$S=1/2.a.h_a=1/2.b.h_b=1/2.c.h_c$	$S=1/2.a.b.\text{sen } C=1/2.a.c.\text{sen } B=1/2.b.c.\text{sen } A$	
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	$S=p.r$ (según-(1))	$S=\frac{abc}{4R}$ 
$S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$	$S=\sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$	



$2p$ = perímetro $=a+b+c$
r = radio circunferencia inscrita
R = radio circunferencia circunscrita
h_a, h_b, h_c = alturas correspondientes … … …
r_a, r_b, r_c = radios circunferencias exinscritas

a los lados a, b, c, respectivamente

Partes de círculo



Expresión analítica

Triángulo: $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

Polígono convexo

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1}\cdot y_i - x_i\cdot y_{i-1})$$

Cuerpos

Angulo diedro: Figura formada por dos semiplanos (caras), que parten de una misma recta (arista).

Angulo poliédrico: Figura formada por varias semirrectas (aristas) no coplanarias tres a tres, con un origen común (vértice) y por varios ángulos planos (caras) determinados por cada dos aristas.

Angulo triedro: Angulo poliédrico de tres caras.

En todo triedro, la *suma* de sus *caras* es <cuatro rectos.

Dos rectos <*suma* de los *diedros de un triedro* <seis rectos.

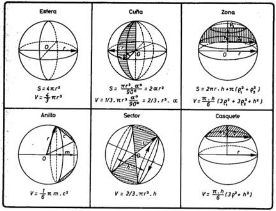
Poliedro regular: Aquel cuyas caras son todas polígonos regulares iguales y todos sus diedros y ángulos poliédricos también iguales. (Véase problema 6.8.)

El área de una proyección ortogonal es igual al producto del área del polígono proyectado, por el coseno del ángulo que forman su plano y el de proyección.

Llamando ahora:

p_r = perímetro de la sección recta.
x, y, z, a_i = aristas.
B, B_1, B_2 = áreas de las bases.
r, r_1, r_2 = radios de las bases.
h = altura.
p, p' = perímetros de las bases.
g = generatriz.
a = apotema.
M = área de la sección equidistante de las bases.

Cuerpo	*Area lateral*	*Area total*	*Volumen*
Prisma oblicuo	$p_r \cdot x$	$p_r \cdot x + 2B$	$B \cdot h$
Prisma recto	$p \cdot x$	$p \cdot x + 2 \cdot B$	$B \cdot x$
Paralelepípedo		$2(xy + xz + yz)$	$x \cdot y \cdot z$
Tronco de prisma			$B \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$
Pirámide regular	$1/2 \cdot p \cdot a$	$1/2 \cdot p \cdot a + B$	$1/3 \cdot B \cdot h$
Prismatoide	polígonos laterales diferentes, en general triángulos, y $M \parallel B_1 \parallel B_2$		$\frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4M)$
Tronco de pirámide	$\frac{p+p'}{2} \cdot a$	$\frac{p+p'}{2} \cdot a + B_1 + B_2$	$\frac{h}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})$
Cilindro de revolución ...	$2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$	$2 \cdot \pi \cdot r(h + r)$	$\pi \cdot r^2 \cdot h$
Cono de revolución	$\pi \cdot r \cdot g$	$\pi \cdot r \cdot (g + r)$	$1/3 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
Tronco de cono	$\pi(r_1 + r_2) \cdot g$	$\pi[r_1(g + r_1) + r_2(g + r_2)]$	$\frac{h}{3}\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

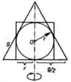


Relaciones de Arquímedes: Si la esfera está inscrita al cono y cilindro (véase figura),

$$\frac{\text{área esfera}}{\text{área lateral cilindro}}=1 \qquad \frac{\text{área esfera}}{\text{área lateral cono}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{área lateral cilindro}}{\text{área lateral cono}}=\frac{2}{3} \qquad \frac{\text{área esfera}}{\text{área total cilindro}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{área esfera}}{\text{área total cono}}=\frac{4}{9} \qquad \frac{\text{área total cilindro}}{\text{área total cono}}=\frac{2}{3}$$

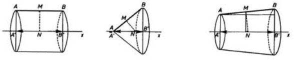


$$\frac{\text{volumen esfera}}{\text{volumen cilindro}}=\frac{2}{3} \qquad \frac{\text{volumen esfera}}{\text{volumen cono}}=\frac{4}{9} \qquad \frac{\text{volumen cilindro}}{\text{volumen cono}}=\frac{2}{3}$$

Area engendrada por un segmento que gira alrededor de un eje coplanario, sin cortarle y sin ser ortogonal al mismo:

"Es el producto de su proyección sobre el eje por la circunferencia de radio el trozo de mediatriz comprendido entre ellos" (mediatriz al segmento)

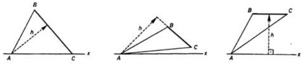
$$\text{área } (\overline{AB})=\overline{A'B'}\cdot 2\pi\overline{MN}$$



Volumen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje coplanario que pasa por uno de sus vértices sin cortarle:

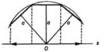
"Es el producto del área engendrada por el lado opuesto a ese vértice por un tercio de la altura relativa —de ese lado— a dicho vértice."

$$\text{Volumen } (ABC)=\text{área } (\overline{CB})\cdot\frac{1}{3}\cdot h$$



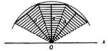
Consecuentemente:

Area de revolución de una poligonal regular



$S = \text{proy}_x \text{ (poligonal)} \cdot 2\pi a$

Volumen de revolución de una poligonal regular



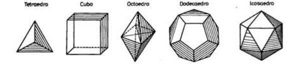
$V = \text{área (poligonal)} \cdot \dfrac{a}{3}$

Nota. Si el número de lados de la poligonal regular aumenta indefinidamente, estas expresiones dan en el límite las fórmulas de las áreas y volúmenes de figuras esféricas ya conocidas.

Volúmenes de *poliedros regulares*:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot p, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} S = \text{área del poliedro;} \\ p = \text{distancia del centro del poliedro a una de sus caras (en su centro).} \end{cases}$$

Tetraedro	Cubo	Octoedro	Dodecaedro	Icosaedro



$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$	a^3	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$	$\frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$	$\frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$

a es en todos los casos la arista respectiva.

Fórmula de Euler: Caras + Vértices = Aristas + 2.

Analíticamente: Véanse problemas 6.14 y 6.15.

PROBLEMAS RESUELTOS

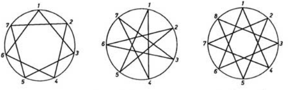
6.1. *Dedúzcanse los posibles polígonos estrellados de números de lados:* $n \leqslant 10$.

Como el número de polígonos estrellados (i) de n lados debe ser:

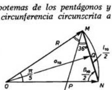
$$a_i \neq n, \quad a_i \neq 1 \quad \text{y} \quad a_i < \frac{n}{2}$$

resulta

Número de lados	a_i	i=polígonos estrellados	*uniendo los vértices de*
3	—	—	—
4	—	—	—
5	2	1 pentágono	2 en 2
6	—	pues 2 y 3 son divisores de 6	—
→ 7	2 y 3	2 heptágonos	2 en 2 y de 3 en 3
→ 8	3	1 octágono	3 en 3
9	2 y 4	2 eneágonos	2 en 2 y de 4 en 4
10	3	1 decágono	3 en 3



6.2. *Dedúzcanse los valores de los lados y apotemas de los pentágonos y decágonos regulares en función del radio de la circunferencia circunscrita a ambos.*



Calculemos primeramente el lado del decágono.

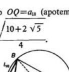
El ángulo central será: $\alpha_{10}=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}=36°$.

Y el del polígono, $\beta_{10}=144°=4\pi/5$ rad.

Si trazamos ahora la bisectriz MP del ángulo M es inmediato (véase la figura) que los triángulos OPM y MPN son isósceles, luego $OP=PM=MN=l_{10}$, $PN=R-l_{10}$, y si ahora aplicamos el teorema de la bisectriz,

$$\frac{MN}{PN}=\frac{MO}{PO} \Rightarrow \frac{l_{10}}{R-l_{10}}=\frac{R}{l_{10}} \Rightarrow l_{10}=R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Por definición, el triángulo OQM es rectángulo, siendo $OQ=a_{10}$ (apotema) y $2\cdot MQ=MN=l_{10}$ luego de $R^2=a_{10}^2+(1/2\cdot l_{10})^2 \Rightarrow a_5=R\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.



Observando la figura, en el triángulo rectángulo ABC, un cateto: $\overline{AB}^2=\overline{AC}\cdot x$, esto es, $l_{10}^2=2R\cdot x= =2R(R-a_5)$, por lo que (sustituyendo) $\Rightarrow a_5= =R\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. También, de $\frac{DB}{2}=\frac{l_5}{2}=\sqrt{R^2-a_5^2} \Rightarrow$

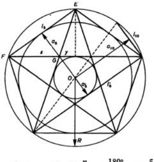
$$\Rightarrow l_5 = R \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

6.3. *La suma de la diagonal y el lado de un pentágono regular es 307,7684 m., se pide:*

1) *Su área y la del pentágono estrellado correspondiente.*
2) *Las áreas de los círculos inscritos a ambos.*

1) Según vemos en la figura, la diagonal del pentágono regular es el lado del estrellado, y éste, a su vez, es el doble de la paotema del decágono regular.

Apoyándonos en los resultados del ejercicio 6.2, precedente, tenemos:



1) Según vemos en la figura, la diagonal del pentágono regular es el lado del estrellado, y éste, a su vez, es el doble de la apotema del decágono regular.

Apoyándonos en los resultados del ejercicio 6.2, precedente, tenemos:

de $d + l_5 = l'_5 + l_5 = 2 \cdot a_{10} + l_5$

sustituyendo,

$$307{,}7684 = \frac{R}{2}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow R = 100{,}0000 \text{ m.}$$

Entonces, $S_5 = R^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{180°}{n} = 10^4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \operatorname{sen} 36° = 14\,694{,}63131 \text{ m.}^2$

En el pentágono estrellado, el perímetro aparente será: $10 \cdot x$ (véase la figura), y su apotema es la mitad del lado del decágono, luego

$$S'_5 = \frac{10x}{2} \cdot \frac{l_{10}}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{l_5'^2}{a_{10}} \cdot \frac{l_{10}}{2}$$

pues en el triángulo FGE se tiene:

$$l_5'^2 = x^2 + x^2 + 2xy = 2 \cdot x \cdot (x + y)$$

pero $x + y = \frac{l'_5}{2} = a_{10}$, luego $2x = \frac{l_5'^2}{a_{10}}$, sustituyendo,

$$S'_5 = \frac{5}{4} \cdot \frac{\frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})}{\frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot R\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 11\,225{,}6994 \text{ m}^2$$

2) En el pentágono regular ocurre $r=a_5$, luego área$=\pi\cdot r^2=\pi\cdot R^2\cdot\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}$ según el 6.2, lo que nos da como área del inscrito: 20 561,99086 m².

Análogamente se hace con el estrellado; el radio de la inscrita es $a_5'=\frac{l_{10}}{2}$, por lo que su área, sustituyendo valores, da:

$$\text{área}=\pi\cdot(a_5')^2=\pi/4\cdot l_{10}^2=\frac{\pi}{4}\cdot R^2\cdot\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}=2\,999{,}95404\ \text{m}^2$$

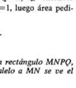
6.4. *Dado el triángulo de vértices $A_1(3,0)$, $A_2(6,4)$, $A_3(6,0)$, calcúlese el área del círculo exinscrito tangente al lado A_1A_2.*

Por comodidad llamemos $x=A_1A_2$. Sabemos que $S=(p-x)\cdot r_x$, entonces $\sqrt{A_1A_2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $A_1A_3=3$ y $A_2A_3=4 \Rightarrow p=6 \Rightarrow p-x=1$, luego área pedida$=\pi\cdot r_x^2=\pi\cdot S^2=\pi\left[\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3&0&1\\6&4&1\\6&0&1\end{vmatrix}\right]^2=\pi\cdot(-12)^2\cdot 1/4=113{,}1\ u^2$.

6.5. *Hállese el área del círculo en el que está inscrito un rectángulo MNPQ, de lado $MN=a$, tal que desde el extremo del diámetro paralelo a MN se ve el lado PN bajo un ángulo dado α.*

Trazando la diagonal MP, los ángulos $\alpha=x=PMN$, por ser inscritos y abarcar el mismo arco NTP.

Entonces, $\alpha=POT$, de donde:

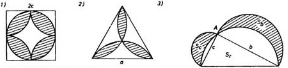


$$\cos\alpha=\cos POU=\frac{OU}{OP} \Rightarrow OP=R=\frac{a}{2\cos\alpha}$$

luego $S=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^2}{\cos^2\alpha}$.

La otra solución es inmediata, teniendo en cuenta que $\alpha+\alpha'=\pi$, y nos daría lo mismo.

6.6. *Calcúlense las áreas de las figuras sombreadas con los datos que se indican.*



1) El área pedida será:

área del círculo inscrito+
+área, suma de las áreas, de los cuatro sectores−
−área del cuadrado=

$$=\pi\cdot c^2+4\cdot c^2\cdot\frac{\pi}{4}-(2c)^2=2\pi c^2-4c^2=2c^2(\pi-2).$$

2) El área pedida es:

área, suma de las áreas iguales, de los segmentos circulares de cuerdas los lados del triángulo, menos área del triángulo (equilátero).

Al cruzarse los arcos de los segmentos en el centro del triángulo, dichos segmentos (de cuerda el lado) tienen como ángulo central: 120°.
Si llamamos r al radio de esos arcos, tenemos como área de cada segmento:

$$\frac{\pi r^2}{360^\circ}\cdot 120^\circ - 1/2\cdot r^2\cdot \operatorname{sen} 120^\circ = r^2(\pi/3-\sqrt{3}/4) = \frac{r^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})$$

(sector)−(triángulo) (véase la parte teórica).

Ahora bien, si a es la cuerda que subtiende al arco $\Rightarrow \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{a/2}{r}$ $\Rightarrow r=a/\sqrt{3}$, luego cada segmento: $\frac{a^2}{36}(4\pi-3\sqrt{3})$, y el área del triángulo dado, equilátero, es: $a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$. En definitiva:

$$\text{área pedida} = 3\cdot\frac{a^2}{36}(4\pi-3\sqrt{3}) - a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{6}(2\pi-3\sqrt{3})$$

3) Las áreas pedidas son las *lúnulas* de Hipócrates; buscaremos su famosa relación.

$$S_b+S_c=\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2+\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2+S_T-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=S_t+\frac{\pi}{4}(b^2+c^2-a^2)=S_t$$

6.7. *Determínese el área del polígono formado por los puntos:*
$P_1(-3,0)$; $P_2(1,1)$; $P_3(-2,5)$; $P_4(4,0)$; $P_5(1,-3)$; $P_6(-1,-2)$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1}y_i-x_iy_{i-1})=\frac{1}{2}[4(-3)-1\cdot 0+1(-2)-(-1)(-3)+$$
$$+(-1)\cdot 0-(-2)(-3)+(-3)\cdot 5-0(-2)+$$
$$+(-2)\cdot 1-1\cdot 5+1\cdot 0-1\cdot 4]=\frac{1}{2}|-49|=\frac{49}{2}\ \mathrm{u}^2$$

(haciendo, p. ej. $P_4=A_0$; $P_5=A_1$; $P_6=A_2$; $P_1=A_3$; $P_3=A_4$; $P_2=A_5$).

Si se dibujan los puntos dados, se ve que el polígono formado es convexo, y, por tanto, la aplicación de la fórmula es correcta.

6.8. *Demuéstrese que sólo existen cinco poliedros convexos regulares.*
La suma de las caras tiene que ser *inferior* a cuatro rectos y además sólo se unen de tres en tres como mínimo, pues de dos en dos son ángulos diedros.

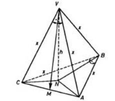
formado por	*de ...*	*posibilidad*	*nombre*	**C**	**V**	**A**
triángulos equiláteros	3 en 3	$3\cdot 60^\circ=180^\circ$ SI	tetraedro	4	6	4
	4 en 4	$4\cdot 60^\circ=240^\circ$ SI	octaedro	8	6	12
	5 en 5	$5\cdot 60^\circ=300^\circ$ SI	icosaedro	20	12	30
	6 en 6	$6\cdot 60^\circ=360^\circ$ NO				
cuadrados	3 en 3	$3\cdot 90^\circ=270^\circ$ SI	cubo	6	8	12
	4 en 4	$4\cdot 90^\circ=360^\circ$ NO				
pentágonos	3 en 3	$3\cdot 108^\circ=324^\circ$ SI	dodecaedro	12	20	30
	4 en 4	$4\cdot 108^\circ=432^\circ$ NO				
hexágonos	3 en 3	$3\cdot 120^\circ=360^\circ$ NO				

No hay más posibilidades.

Se llaman poliedros conjugados aquellos en que el número de caras de uno es el de vértices del otro, y viceversa $\Rightarrow$ los centros de las caras del uno son los vértices del conjugado.

Observando el cuadro realizado vemos que son conjugados el octaedro y el cubo, el icosaedro y el dodecaedro. El tetraedro es conjugado de sí mismo.

6.9. *Sea una pirámide de base triangular, con dos de sus caras triángulos equiláteros y las otras dos restantes, triángulos rectángulos isósceles. Hállese el área de la esfera inscrita en ella.*



Supongamos, según la figura, que los triángulos $\widehat{AVB}$, $\widehat{BVC}$ son los equiláteros, y $\widehat{CVA}=90°=\widehat{ABC}$.

Llamando x al lado del triángulo equilátero, tenemos, S_t=área de dos triángulos equiláteros + dos áreas de los rectángulos isósceles

$$S_t=2\cdot x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\tfrac{1}{2}\cdot x^2+\tfrac{1}{2}\cdot x^2=\tfrac{1}{2}\cdot x^2\cdot(\sqrt{3}+2).$$

Hállemos ahora su volumen.

Supongamos, según la figura, que la altura sea $h=VN$; como las aristas son iguales $\Rightarrow NA=NC=NB$, luego N es el centro de la circunferencia circunscrita a la base.

Ahora bien, el ángulo en $B=90°$, por lo primero dicho; por consiguiente, N debe estar en el punto medio del lado $AC \Rightarrow M$ es el pie de la altura y no N, como habíamos supuesto.

Entonces, $VM=x\cdot\cos 45°=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$, ya que el triángulo $\widehat{CVA}$ es isósceles con el ángulo en $V=90°$.

$$\Rightarrow \text{volumen}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{x^3}{6\sqrt{2}}.$$

Si tenemos una esfera inscrita en una pirámide, hagamos lo siguiente: Unimos el centro de la esfera con los vértices de la pirámide, con lo cual tenemos descompuesta la dada en varias pirámides más pequeñas, que tienen todas, como altura, la misma: el radio de la inscrita.

Si calculamos los volúmenes de todas ellas —con respecto a esa altura— y los sumamos, nos dará el volumen de la pirámide primera, de la forma:

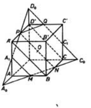
$$V=\frac{1}{3}\cdot S_t\cdot r \qquad (S_t=\text{área total de la pirámide})$$

en nuestro caso:

$$r=\frac{3V}{S_t}=\frac{3\dfrac{x^3}{6\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{2}x^2(\sqrt{3}+2)}=\frac{x}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)}, \text{ de donde,}$$

$$\text{área pedida}=4\pi r^2=\frac{2\pi x^2}{(\sqrt{3}+2)^2}$$

6.10. *Calcúlese el área de la sección producida al cortar a un cubo por un plano que pasa por su centro y por los puntos medios de dos aristas consecutivas.*



Sean M y N los puntos medios del enunciado. El plano dado será $A_0C_0D_0$, que se intercepta con el $A'BCD'$, por pasar ambos por O, según la recta $PN \Rightarrow P$ es punto medio de $A'D'$. Análogamente, Q es punto medio de $C'D'$.

Los triángulos A_0AM, MBN, NCC_0 son iguales; por tanto, $A_0A=C_0C=AM=CN=\frac{1}{2}AB$, es decir, la mitad de la arista. $\Rightarrow PA'=A_0A$ y como A_0, A_1, P están alineados $\Rightarrow A_1$ es punto medio de $A'A$.

Por lo mismo, C_1 es punto medio de $C'C$. En consecuencia, todos los vértices del hexágono son puntos medios de las aristas respectivas.

Si ahora nos fijamos en los lados del hexágono, son todos paralelos a las diagonales de las caras del cubo $\Rightarrow$ es equilátero. (1)

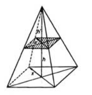
Además, el triángulo A_0A_1M es equilátero, luego $A_1MA_0=60^\circ \Rightarrow A_1NM=120^\circ$, y análogamente los demás ángulos del hexágono $\Rightarrow$ es equiángulo. Con esto último y lo de (1), llegamos a que el *hexágono es regular.*

Llamando a a la arista del cubo, el lado del hexágono es paralelo a la diagonal de una de las caras del cubo por el punto medio $\Rightarrow$ lado$=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}$ y como apotema=lado$\cdot\sqrt{3}/2 \Rightarrow S=3\cdot\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}/2.$

$$S=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

6.11. *Dedúzcase la relación en que se divide el volumen de una pirámide regular de base cuadrada, si al cortarla por un plano paralelo a la base, el área de la sección es cuatro veces menor que la de la base.*

Como vemos en la figura, $\frac{h'}{h}=\frac{x'}{x}$ por Thales, y como, a su vez: diagonal$=2x'=$lado$\cdot\sqrt{2}$



$$\Rightarrow \frac{h'}{h}=\frac{l'}{l}=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4s}}=\frac{1}{2},$$

Por tanto,

$$\frac{v'}{V}=\frac{\frac{1}{3}\cdot h'\cdot s}{\frac{1}{3}\cdot h\cdot S}=\frac{h'}{h}\cdot\frac{s}{4s}=\frac{1}{8}$$

6.12. *En un cono de revolución recto se han colocado cuatro esferas iguales de radio R. Tres de ellas están en la base de forma que cada una de ellas es tangente a la superficie lateral del cono y a las otras dos restantes. La cuarta es tangente a la superficie lateral del cono y a las tres esferas anteriores. Hállense el volumen del cono y el espacio hueco del conjunto.*

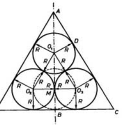
El cono debe tener como sección vertical un triángulo equilátero debido a la posición de las esferas (véase aclaración gráfica).

Descompongamos la altura del cono en tres sumandos,

$h_t = \text{lado} \cdot \sqrt{3}/2 = 2R \cdot \sqrt{3}/2 = R\sqrt{3}$

$h_c = AO_1 + h_t(O_1O_2O_3) + MB$

$MB = R;$



y en el triángulo O_1DA, el ángulo en O_1 es de 60°, luego

$$O_1A = \frac{R}{\cos 60°} \Rightarrow O_1A = 2R.$$

Sustituyendo, $h_c = R(3+\sqrt{3})$.

Por ser equilátero, $AC = 2BC = 2 \cdot r$ si r es el radio de la base; entonces

$$\sqrt{3} = \text{tag } 60° = \text{tag } C = \frac{h_c}{r} \Rightarrow r = \frac{h_c}{\sqrt{3}} = R \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_c = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{(3+\sqrt{3})^2}{3} \cdot R \cdot (3+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{9} R^3 (3+\sqrt{3})^3.$$

$\text{Hueco} = V - vl \cdot \text{de las cuatro esferas} = \frac{\pi}{9} R^3 [(3+\sqrt{3})^3 - 48].$

También, aproximando: $V = 36{,}987\,549\,56 \cdot R^3$; hueco $= 20{,}232\,388\,74 \cdot R^3$.

6.13. *Determínese la arista del octaedro cuyo volumen es treinta y dos veces el del tetraedro de* 15,588 457 3 m^2 *de área.*

$$\frac{V_T}{V_O} = \left(\frac{a_t^3}{12}\sqrt{2}\right) : \left(\frac{a_o^3}{3}\sqrt{2}\right) = \frac{3 \cdot a_t}{12 \cdot a_o^3} = \frac{a_t}{4 \cdot a_o^3} = \frac{V_t}{32 \cdot V_t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_o = 2 \cdot a_t = 6 \text{ m., pues:}$$

El área del tetraedro es,

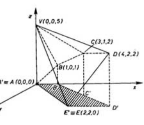
$$4 \cdot a_t^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 15{,}5884573 \Rightarrow a_t = 3{,}000 \text{ m.}$$

6.14. *Calcúlese el volumen de la pirámide de base ABCDE y vértice opuesto a la base, V, dados por:* $A(0,0,0)$; $B(1,0,1)$; $C(3,1,2)$; $D(4,2,2)$; $E(2,2,0)$, $V(0,0,5)$.

Ecuación del plano definido por A, B, E:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ o sea: } x - y - z = 0$$

y vemos que (sustituyendo) C y D cumplen esa ecuación; por tanto, se trata del plano del polígono.



Area del polígono-proyección sobre el plano $z=0$:

$$A'(0,0);\quad B'(1,0);\quad C'(3,1);\quad D'(4,2);\quad E'(2,2)$$
$$(x_0, y_0);\quad (x_1, y_1);\quad (x_2, y_2);\quad (x_3, y_3);\quad (x_4, y_4)$$
$$(x_0, y_0)\ \cdots\ {}_1\ \cdots\ {}_2\ \cdots\ {}_3\ \cdots\ {}_4\ \cdots$$

$$S'=\frac{1}{2}[(0-0)+(1\cdot 1-0)+(3\cdot 2-4\cdot 1)+(4\cdot 2-2\cdot 2)+(0-0)]=\frac{7}{2}\ u^2.$$

Angulo de los planos $\left.\begin{matrix} x-y-z=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\}$ es $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Area del polígono $ABCDE$, base del problema:

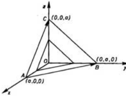
$$S=\frac{S'}{\cos\gamma}=\frac{7/2}{1/\sqrt{3}}=\frac{7}{2}\sqrt{3}\ u^2.$$

Altura de la pirámide = distancia del vértice, V, al plano de la base,

$$h=\frac{|0-0-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\ u.$$

en fin, volumen $=V=\frac{1}{3}\,S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{35}{6}\ u^3.$

6.15. *Hállese el volumen del poliedro formado por los planos coordenados y los* $\Pi_1\equiv x+y+z=a$, $\Pi_2\equiv x+y+z=b$, *con* $b<a$.



Buscando la forma *normal* de la ecuación de un plano,

$$\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{z}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}},$$
$$\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{z}{\sqrt{3}}=\frac{b}{\sqrt{3}}$$

automáticamente nos viene dada la distancia del origen de los dos planos.

La figura que forman es un tronco de pirámide triangular; bases paralelas, pues el mismo vector $(1, 1, 1)$ es normal a los dos planos.

$$\Rightarrow \text{altura del tronco}=\frac{a-b}{\sqrt{3}}$$

área de la base del Π_1 = módulo de $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -a & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}=|a^2\cdot(1,1,1)|=a^2\sqrt{3}$

tomando $\overrightarrow{AB}=(-a, a, 0)$

$\overrightarrow{AC}=(-a, 0, a)$

Análogamente ocurre con la base del Π_2, basta cambiar la a por la b.

$$V=\frac{h}{3}\,(B_1+B_2+\sqrt{B_1B_2})=\frac{a-b}{3\sqrt{3}}\,(a^2\sqrt{3}+b^2\sqrt{3}+\sqrt{a^2\sqrt{3}\cdot b^2\sqrt{3}})=$$
$$=\frac{a-b}{3}\,(a^2+b^2+a\cdot b)=\frac{a^3-b^3}{3}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

6.16. Hállense, en función del radio de la circunferencia circunscrita, los lados de: *a*), el pentadecágono regular; *b*), los pentadecágonos estrellados.

6.17. Calcúlense los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos sobre la misma circunferencia, del doble número de lados que uno dado.

6.18. Dado un polígono de un número par de lados, demuéstrense las implicaciones:

a) Inscrito y equiángulo $\Rightarrow$ lados iguales dos a dos.

b) circunscrito y equilátero $\Rightarrow$ ángulos iguales dos a dos.

6.19. Pruébese que en todo paralelogramo la suma de los cuadrados de los lados es lo mismo que la suma de los cuadrados de las diagonales.

6.20. Hállese el lugar geométrico de los puntos del plano por los que, al trazar tangentes a una misma circunferencia, formen ellas un ángulo dado z.

6.21. El perímetro de un triángulo es 80 cm, y sus alturas, $h_a=20$ cm, $h_b=24$ cm y $h_c=24$ cm. Calcúlese los lados; las medianas; las bisectrices; su área; los radios de las circunferencias inscrita, circunscrita y exinscritas, así como sus respectivas áreas.

6.22. En un triángulo ABC se verifica que: área$=a^2-(b-c)^2$. Calcúlese A.

6.23. Determínese la altura que deberán tener los rectángulos construidos sobre los lados de un cuadrado para que, uniendo todos los vértices, resulte un octógono regular.

6.24. Calcúlese el área de una faja circular limitada por:

1) Los lados del hexágono y triángulo equilátero.
2) Los lados del pentágono regular y del estrellado.

6.25. Una circunferencia de 5 m de radio se circunscribe a un rectángulo de 4 m de anchura. Determínese el área total de los cuatro segmentos en que queda dividido el círculo, sin contar el rectángulo y la relación que hay entre ellas.

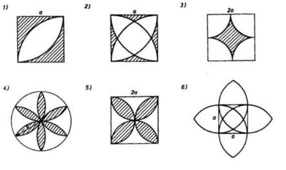
6.26. Hállese el área de un cuadrado inscrito en un triángulo rectángulo de modo que tengan ambos el ángulo recto común.

6.27. Al trazar una cuerda por el extremo del diámetro de una esfera y hacerla rotar sobre el mismo se hace una división del volumen de dicha esfera en dos partes iguales. Se pide el ángulo entre la cuerda y el diámetro.

6.28. La relación entre las áreas de dos rectángulos es 5/8, y las dimensiones de uno de ellos exceden en 15 m a las del otro, de perímetro 240 m. Hállense sus dimensiones.

6.29. Dos caras laterales de una pirámide de base cuadrangular son ortogonales a la base, y las otras forman con ésta un ángulo igual β cada una. Se pide el ángulo diedro que forman las dos últimas caras laterales.

6.30. Dedúzcanse las áreas sombreadas con los datos que se indican.



En la última, (6), la mayor área limitada; además, la relación entre las dos cruces.

6.31. Hállese el área del polígono $A(1, 1)$; $B(2, 3)$; $C(4, 4)$; $D(3, 5)$; $E(1, 4)$, y la del triángulo dado por $M(1, 2, 1)$; $N(3, 3, 2)$; $P(1, -1, 0)$.

6.32. En un tetraedro queda dividido su volumen en la relación 3/5 al cortar por un plano una de sus aristas. Dedúzcanse las tangentes de los ángulos en que dicho plano divide al ángulo diedro del tetraedro, si éste es regular.

6.33. Calcúlese el radio de una esfera que tiene un sector de volumen 0,633 m³ en un casquete de 1,2 m².

6.34. La diagonal de la base cuadrangular de un prisma recto regular son 4 m, y un plano secante determina sobre las aristas segmentos de 7, 8 y 3 m. Hállese el volumen del tronco formado.

6.35. Las alturas de dos casquetes opuestos en una esfera de 10,5 m de radio miden 4,2 m y 6,3 m. Se pide: Volúmenes de los sectores de cada casquete y de sus conos respectivos.

6.36. Dedúzcanse los radios de las bases de un cono y cilindro de revolución equivalentes en área total y volumen, de altura h.

6.37. Al inclinar un ángulo de 30° un cubo de 7 m de arista sobre una de ellas, estando lleno de agua, ¿qué cantidad se derrama?

6.38. Un aula de clase tiene de dimensiones $7 \times 8 \times 3,8$ metros. Si se desea que tanto los cuarenta alumnos como el profesor tengan cada uno 5,5 m³ de aire, que altura se debería levantar el techo.

6.39. La distancia entre los centros de dos esferas, de radios 3 y 4 m, es de 5 m. Calcúlese el volumen común a ellas.

6.40. Los puntos de intersección de las alturas de cada una de las caras laterales y el vértice de una pirámide regular de base triangular, de altura h, se encuentran sobre una esfera de radio R. Hállese el volumen de la pirámide.

6.41. Demuéstrese que el área de una esfera inscrita en un tronco de cono es menor que la superficie lateral del cono.

6.42. En una superficie plana se colocan: un cono circular recto (de radio 1 m y altura 2 m) y un soporte vertical (a 2 m del centro del cono y con una altura de 4 m), con un foco de luz en su extremo superior. Se pide el área de la sombra producida.

6.43. Discútase la posibilidad de que, al cortar por un plano a un cubo se obtengan: *a*), un cuadrado; *b*), un pentágono; *c*), un hexágono; *d*), un hexágono regular.

6.44. Calcúlense los volúmenes limitados por las superficies que se indican:

1) Las bases del 6.31 y el plano $x+y-3z+4=0$, en los dos casos.
2) $A(3, 2, 1)$; $B(1, 2, 4)$; $C(4, 0, 3)$; $D(1, 1, 7)$.
3) $O(0, 0, 0)$; $M(1, 0, 0)$; $N(0, 1, 0)$; $P(1, 1, 1)$.
4) $x^2+y^2-36=0$; $z=10$; $3x+4y=0$.
5) $x^2+y^2=z$, $z=4$, $z=9$.

6.45. En una pirámide regular cuadrangular, el plano que pasa por un lado de la base y la línea media de la cara lateral opuesta, forma un ángulo de 60° con la base. Si el lado de la base es z, calcúlese el volumen de la pirámide.

6.46. Determínense los volúmenes del tetraedro regular, del cubo y del octaedro, inscritos en una esfera de radio R.

6.47. Pruébense las relaciones de Arquímedes.

6.48. Calcúlense el área y el volumen producidos al girar un hexágono regular alrededor de uno de sus lados.

6.49. Una esfera está inscrita en un cubo de arista $2a$; determínese el radio de una de las esferas que es tangente a la dada y a tres de las caras del cubo.

6.50. Calcúlese la relación entre el volumen de una pirámide regular triangular y el de la esfera inscrita a ella, sabiendo que el radio de esta última es la tercera parte del de la circunscrita.

7

Transformaciones geométricas

El plano afín es un espacio afín de dimensión 2.

El plano afín es el plano vectorial con la aplicación

$$\mathcal{P} \times V_2 \to \mathcal{P}$$

$$\text{I.} \quad \forall N, M \in \mathcal{P}, \exists^* \bar{x} \in V_2 / N = M + \bar{x}$$

$$\text{II.} \quad M + \bar{x} = M \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$$

$$\text{III.} \quad (M + \bar{x}) + \bar{y} = M + (\bar{x} + \bar{y})$$

El plano euclídeo es un espacio euclídeo de dimensión 2.

El plano euclídeo es el plano afín con la aplicación *distancia*, o, lo que es lo mismo, con el producto escalar

$$(P, Q) \to d(P, Q)$$

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, \quad d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Transformación en un espacio geométrico es una biyección del espacio sobre sí mismo.

Transformación en el plano euclídeo es una biyección del plano sobre sí mismo.

Sobre el plano euclídeo y también sobre el plano afín se pueden desarrollar las transformaciones, llamadas *afinidades*.

Afinidad

$$\begin{cases} x' = ax + by + \alpha \\ y' = cx + dy + \beta \end{cases} \text{ con } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0; \quad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \alpha \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \beta \end{cases} \text{ con } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

o bien $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Congruencia

Afinidad que conserva distancias entre puntos homólogos

Semejanza

Afinidad que conserva el valor absoluto de ángulos homólogos

Congruencias

Conservar distancias $\longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sea ortogonal

A es ortogonal $\longleftrightarrow A' \cdot A = I \longleftrightarrow A' \equiv A^{-1} \longleftrightarrow A \equiv (A')^{-1}$

La ortogonalidad de A exije que se cumplan las relaciones

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{12}\, a_{11} + a_{22}\, a_{21} = 0 \end{cases}$$

Para ello existen dos posibilidades de forma, para la matríz de los coeficientes:

Congruencia directa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 + \alpha \\ x_2' = bx_1 + ax_2 + \beta \end{cases}$$

con $a^2 + b^2 = 1$

Congruencia inversa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 + \alpha \\ x_2' = bx_1 - ax_2 + \beta \end{cases}$$

con $-a^2 - b^2 = -1$

Traslación: $\vec{v}(\alpha, \beta)$

$$T \begin{cases} x_1' = x_1 + \alpha \\ x_2' = x_2 + \beta \end{cases}$$

Giro

Centro $O(0,0)$; amplitud $= \varphi$

$$G_O \begin{cases} x_1' = x_1 \cos\varphi - x_2 \operatorname{sen}\varphi \\ x_2' = x_1 \operatorname{sen}\varphi + x_2 \cos\varphi \end{cases}$$

Centro $A(m,n)$; amplitud $= \varphi$

$$G_A \begin{cases} x_1' = (x_1 - m)\cos\varphi - (x_2 - n)\operatorname{sen}\varphi + m \\ x_2' = (x_1 - m)\operatorname{sen}\varphi + (x_2 - n)\cos\varphi + n \end{cases}$$

Simetría

$$S_{x_1} \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -x_2 \end{cases} ; \quad S_{x_2} \begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

$r \quad x_2 = \operatorname{tg}\psi \cdot x_1$

$$S_r \begin{cases} x_1' = x_1 \cos 2\psi + x_2 \operatorname{sen} 2\psi \\ x_2' = x_1 \operatorname{sen} 2\psi - x_2 \cos 2\psi \end{cases}$$

El producto de dos simetrías S_r y $S_{r'}$, si $\begin{cases} r // r' \text{ y } \overline{rr'} = d \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{r'} \circ S_r = T \text{ de vector } \begin{cases} \bar{v} \perp r \\ |\bar{v}| = 2d \end{cases} \\ \widehat{rr'} = \varphi \text{ y } r \cap r' = P \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{r'} \circ S_r = G \begin{cases} \text{centro } P \\ \text{amplitud} = 2\varphi \end{cases} \end{cases}$

Semejanzas

Conserva el valor absoluto de ángulos homólogos $\longleftrightarrow$ La razón de módulos de vectores homólogos es constante e igual a $\sqrt{k}$. $\longleftrightarrow$ $A'.A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

La condición impuesta exije para la matriz A que se cumplan las relaciones

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = k \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = k \\ a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0 \end{cases}$$

Para ello existen dos posibilidades

Semejanza directa

$|A| = +k$

$\begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} -\sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix}$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

o bien

$$\begin{cases} x_1' = \pm\sqrt{k}\, x_1 + \alpha \\ x_2' = \pm\sqrt{k}\, x_2 + \beta \end{cases}$$

Semejanza inversa

$|A| = -k$

$\begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & -\sqrt{k} \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} -\sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix}$

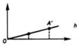
Entonces,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & -\sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

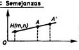
o bien

$$\begin{cases} x_1' = \sqrt{k}\, x_1 + \alpha \\ x_2' = -\sqrt{k}\, x_2 + \beta \end{cases} \Bigg\| \quad \begin{matrix} x_1' = -\sqrt{k}\, x_1 + \alpha \\ x_2' = \sqrt{k}\, x_2 + \beta \end{matrix}$$

Homotecias $\subset$ Semejanzas



$h \begin{cases} \text{centro: } O(0,0) \\ \text{razón: } \sqrt{k} \end{cases}$



$h_H \begin{cases} \text{centro: } H(m,n) \\ \text{razón: } \sqrt{k} \end{cases}$

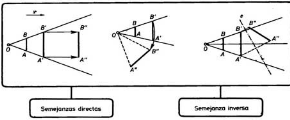
$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \sqrt{k} \qquad\qquad \frac{x_1' - m}{x_1 - m} = \frac{x_2' - n}{x_2 - n} = \sqrt{k}$$

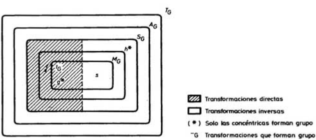
$$h_O \begin{cases} x_1' = \sqrt{k} x_1 \\ x_2' = \sqrt{k} x_2 \end{cases} \qquad\qquad h_H \begin{cases} x_1' = \sqrt{k} x_1 - m\sqrt{k} + m \\ x_2' = \sqrt{k} x_2 - n\sqrt{k} + n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m - m\sqrt{k} \\ n - n\sqrt{k} \end{pmatrix}$$

Una semejanza S es igual a la composición de una homotecia h por una con-g uencia M

$$S = M \circ h$$





Todo lo analizado en el espacio E_2 es trasladable al E_3 y, en general, al E_n. Por ejemplo, para que una transformación afín en E_3 sea congruencia es necesario y suficiente que la matriz de los coeficientes sea ortogonal:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0$$

El que la matriz de los coeficientes de esa afinidad sea ortogonal implica que:

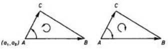
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 \\ 1 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 \\ 1 = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0 \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 \end{array} \right.$$

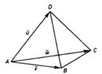
$$|A' \cdot A| = |A'| \cdot |A| = |A|^2 = |I| = 1$$

$$|A| = \pm 1 \left\langle \begin{array}{l} +1 \Rightarrow \text{Congruencia directa} \\ -1 \Rightarrow \text{Congruencia inversa} \end{array} \right.$$

Orientación

En el plano | *En el espacio*





Signo del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ b_2-a_2 & c_2-a_2 \end{vmatrix}$$

Signo del determinante

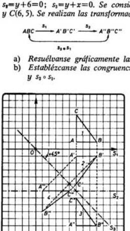
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & u_1 \\ v_2 & w_2 & u_2 \\ v_3 & w_3 & u_3 \end{vmatrix}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

7.1. *Se establecen tres simetrías s_1, s_2 y s_3, de ejes respectivos $s_1 \equiv y=0$; $s_2 \equiv y+6=0$; $s_3 \equiv y+x=0$. Se considera el triángulo de vértices $A(6, 1)$, $B(9, 1)$ y $C(6, 5)$. Se realizan las transformaciones que se indican:*

$$\underbrace{ABC \xrightarrow{s_1} A'B'C' \xrightarrow{s_2} A''B''C''}_{s_2 \circ s_1} \qquad \underbrace{ABC \xrightarrow{s_1} A'B'C' \xrightarrow{s_3} A'''B'''C'''}_{s_3 \circ s_1}$$

a) *Resuélvanse gráficamente las dos situaciones.*
b) *Establézcanse las congruencias a que dan lugar las composiciones $s_2 \circ s_1$ y $s_3 \circ s_1$.*



$$s_1 // s_2 \text{ y } \bar{s}_1\bar{s}_2=6$$

$$s_2 \circ s_1 = T(\bar{v}) \,/\, |\bar{v}|=12 \text{ y } \bar{v} \perp s_1$$

$$\bar{v}=(0, -12)$$

$$T \begin{cases} x'=x+0 \\ y'=y-12 \end{cases} \Big\| \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$s_1 \cap s_3 = 0(0, 0) \text{ y } \widehat{s_1 s_3}=+45^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$s_3 \circ s_1 = G(0, +90^\circ)$$

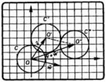
$$G \begin{cases} x'=x \cos 90^\circ - y \operatorname{sen} 90^\circ \\ y'=x \operatorname{sen} 90^\circ + y \cos 90^\circ \end{cases} \Big\| \begin{matrix} x'=-y \\ y'=\;\;x \end{matrix} \Big\|$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7.2. *Dadas las traslaciones* $\bar{v}=(2, 3)$ *y* $\bar{w}=(4, -1)$, *hállese la transformada de la circunferencia* $x^2+y^2=4$:

a) *por sucesiva aplicación de ambas traslaciones;*
b) *por la composición* $t_2 \circ t_1$.

Se traslada el centro.



$$t_1 \begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+3 \end{cases} \Rightarrow 0'(2, 3) \Rightarrow \mathcal{C}'=(x'-2)^2+(y'-3)^2=4$$

$$t_2 \begin{cases} x''=x'+4 \\ y''=y'-1 \end{cases} \Rightarrow 0''(6, 2) \Rightarrow \mathcal{C}''=(x''-6)^2+(y''-2)^2=4$$

$$\mathcal{C} \xrightarrow[t_2 \circ t_1]{\bar{v}+\bar{w}=(6, 2)} \mathcal{C}''$$

$$0(0, 0) \longrightarrow 0''(6, 2)$$

$$x^2+y^2=4 \longrightarrow (x-6)^2+(y-2)^2=4$$

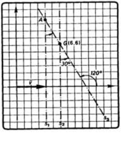
$$T=t_2 \circ t_1 \begin{cases} x''=x+6 \\ y''=y+2 \end{cases} \Bigg\| \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7.3. *Una traslación t de vector* $\bar{v}=(4, 0)$, *se compone con un giro g, de centro G(6, 6) y amplitud 60°. Hállense las ecuaciones de las transformaciones* $g \circ t$ *y* $t \circ g$.

Para componer giros y traslaciones, se hace descomponiendo cada una de las congruencias en producto de dos simetrías, cuidando que el segundo factor de la primera coincida con el primer factor de la segunda; es decir:

$$\left.\begin{aligned} t&=s_2 \circ s_1 \\ g&=s_3 \circ s_2 \end{aligned}\right\}$$

$$g \circ t=s_3 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_1$$
$$g \circ t=s_3 \circ (s_2)^2 \circ s_1$$



De este modo se consigue el cuadrado de una simetría que, por ser involutiva, es la transformación idéntica:

$$g \circ t=s_3 \circ I \circ s_1$$
$$g \circ t=s_3 \circ s_1$$

La simetría s_2, común a la t y al g ha de ser de eje $s_2 \perp \bar{v}$ y pasar por el centro de giro, de modo que es la dibujada.

La s_1 ha de ser tal que $s_2 \circ s_1=t$; por tanto, $s_1 \perp \bar{v}$ y, además, $\bar{s}_1\bar{s}_2=\dfrac{1}{2}\,|\bar{v}|=2$.

La s_3 ha de tener por eje una recta que pase por G y, además, $\widehat{s_2 s_3}=\dfrac{60°}{2}= +30°$.

s_1 y s_2 se cortan en A, bajo un ángulo de 30°, luego se trata de un giro de centro A y amplitud $2\times 30°=60°$.

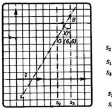
$$g \circ t=s_3 \circ s_1=\text{Giro}(A, +60°)$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = x = 4 \\ s_3 = y - 6 = -\sqrt{3}(x-6) \end{array}\right\} s_1 \cap s_3 = A(4,\, 2\sqrt{3}+6)$$

Ecuaciones

$$\begin{array}{l|l} x' = (x-4)\dfrac{1}{2} - (y - 2\sqrt{3} - 6)\sqrt{3}/2 + 4 & x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 5 + 3\sqrt{3} \\ y' = (x-4)\sqrt{3}/2 + (y - 2\sqrt{3} - 6)\dfrac{1}{2} + 2\sqrt{3} + 6 & y' = \sqrt{3}/2\,x + \dfrac{1}{2}y + 3 - \sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5+3\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$



Con la misma técnica anterior,

$$\begin{array}{c} g = s_2 \circ s_1 \\ t = s_3 \circ s_2 \\ \hline t \circ g = s_3 \circ s_1 \end{array}$$

s_2 es la simetría común, de modo que $G \in s_2$ y $s_2 \perp \bar{v}$.

s_1 ha de ser tal que $G \in s_1$ y $\widehat{s_1 s_2} = 30°$.

s_3 cumple que $s_3 \,//\, s_2$ y $\bar{s}_2\bar{s}_3 = |\bar{v}|/2 = 2$.

$$t \circ g = s_3 \circ s_1 = \text{Giro } (B, 60°)$$

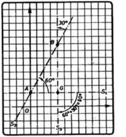
$$\left.\begin{array}{l} s_1 = y - 6 = \sqrt{3}(x-6) \\ s_3 = y = 8 \end{array}\right\} s_1 \cap s_3 = \left(\frac{2\sqrt{3}+18}{3},\, 8\right)$$

Ecuaciones

$$x' = \left(x - \frac{2\sqrt{3}+18}{3}\right)\frac{1}{2} - (y-8)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}+18}{3}$$

$$y' = \left(x - \frac{2\sqrt{3}+18}{3}\right)\cdot\sqrt{3}/2 + (y-8)\frac{1}{2} + 8$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{13\sqrt{3}+9}{3} \\ 3-3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$



7.4. *Hállense las ecuaciones de la transformación* $g_2 \circ g_1$, siendo $g_1(A,\, 120°)$; $g_2(B,\, 60°)$; $A(0, 2)$; $B(4,\, 2+4\sqrt{3})$

$$\left.\begin{array}{l} g_1 = s_2 \circ s_1 \\ g_2 = s_3 \circ s_2 \end{array}\right\} g_2 \circ g_1 = s_3 \circ s_1$$

El eje de la simetría común s_2 ha de pasar por A y por B

$$g_2 \circ g_1 = \text{Giro } (G,\, 90 \times 2 = 180°)$$

El punto G es:

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = y = 2 \\ s_3 = x = 4 \end{array}\right\} s_1 \cap s_3 = G(4, 2)$$

Ecuaciones

$$\begin{array}{l|l|l} x'=(x-4)\cos 180-(y-2)\operatorname{sen} 180+4 & x'=-x+8 & \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\ y'=(x-4)\operatorname{sen} 180+(y-2)\cos 180+2 & y'=-y+4 & \end{array}$$

7.5. *Estúdiese la transformación*

$$x'_1=x_1+\sqrt{3}\,x_2-2$$
$$x'_2=-\sqrt{3}\,x_1+x_2+3$$

En forma matricial, se escribe:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Como

$$A'\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

se trata de una semejanza directa de razón $\sqrt{4}=2$.

Para determinar su centro, basta considerar que es punto "doble", o sea, invariante en la transformación. Entonces, basta poner en las ecuaciones de la transformación x_1 en lugar de x'_1, y x_2 en vez de x'_2:

$$\left.\begin{cases} x_1=x_1+\sqrt{3}\,x_2-2 & \Rightarrow x_2=2/\sqrt{3} \\ x_2=-\sqrt{3}\,x_1+x_2+3 & \Rightarrow x_1=\sqrt{3} \end{cases}\right\} \text{Centro } (\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$$

7.6. *Dada la transformación*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

1.° *Determínense la razón y centro de semejanza directa.*
2.° *Caracterícense la homotecia y el giro concéntricos que la componen.*

$$A'\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow \sqrt{k}=\sqrt{4}=2=\textit{razón}$$

Las ecuaciones de la transformación correspondientes a la forma matricial dada son:

$$\begin{cases} x'_1=-2x_2+5 \\ x'_2=2x_1-5 \end{cases}$$

El centro buscado A, es punto doble; por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} x_1=-2x_2+5 \\ x_2=2x_1-5 \end{array}\right\} \Rightarrow A(3, 1)$$

La homotecia que compone la semejanza es $h\begin{cases} \text{centro}: A(3, 1) \\ \text{razón}: \sqrt{k}=2 \end{cases}$

Para caracterizar el giro de centro $A(3, 1)$ que compone, junto con la homotecia la semejanza, falta por determinar la amplitud del giro. Para ello, puede seguirse este proceso:

Se establecen dos vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AP'}$, homólogos en la transformación, y se calcula el ángulo que forman.

Por ejemplo, se considera el punto $P(5, 1)$ y el vector $\overrightarrow{AP}=(2, 0)$

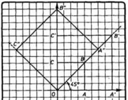
$$P'\left\{\begin{matrix} x_1'=-2\cdot 1+5=3 \\ x_2'=2\cdot 5-5=5 \end{matrix}\right\} P'(3, 5) \Rightarrow \overrightarrow{AP'}=(0, 4)$$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AP'}| \cos\varphi$$

$$2\cdot 0+0\cdot 4=\sqrt{4+0}\cdot\sqrt{0+16}\cdot\cos\varphi \Rightarrow 0=8\cdot\cos\varphi \Rightarrow \varphi=90^\circ$$

El giro que compone la semejanza es $g\left\{\begin{matrix} \text{centro}: A(3, 1) \\ \text{amplitud}: \varphi=90^\circ \end{matrix}\right.$

7.7. *El cuadrado de vértices $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 4)$ y $C(0, 4)$ se transforma por una homotecia de centro O y razón 2 en el $OA'B'C'$, y éste se gira con centro en O y amplitud $+45°$ hasta el $OA''B''C''$. Dibújese. Hállense las ecuaciones de la homotecia, las del giro, así como las de la semejanza producto*



$$h: \frac{x_1}{x_1'}=\frac{x_2}{x_2'}=\sqrt{k}=2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h\left\{\begin{matrix} x_1'=2x_1 \\ x_2'=2x_2 \end{matrix}\right.$$

$$g: \begin{cases} x_1''=x_1' \cos 45-x_2' \operatorname{sen} 45=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x_1'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x_2' \\ x_2''=x_1' \operatorname{sen} 45+x_2' \cos 45=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x_1'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x_2' \end{cases}$$

Componiendo,

$$\begin{matrix} x_1''=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,2x_1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,2x_2 \\ x_2''=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,2x_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,2x_2 \end{matrix} \left|\left| \begin{matrix} x_1''=\sqrt{2}\,x_1-\sqrt{2}\,x_2 \\ x_2''=\sqrt{2}\,x_1+\sqrt{2}\,x_2 \end{matrix} \right|\right| \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7.8. *Hállense las ecuaciones de la homotecia, de la simetría y de la semejanza, composición de ambas, según los datos:*

$$s\equiv x+y=0$$

$$h\left\{\begin{matrix} \textit{centro: } H(2, 2) \\ \textit{razón: } \sqrt{k}=3 \end{matrix}\right.$$

$$h: \frac{x_1'-2}{x_1-2}=\frac{x_2'-2}{x_2-2}=3 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1'=3x_1-4 \\ x_2'=3x_2-4 \end{matrix}\right.$$

$$s\left\{\begin{matrix} x_1''=-x_2' \\ x_2''=-x_1' \end{matrix}\right.$$

$$s\circ h\left\{\begin{matrix} x_1''=-3x_2+4 \\ x_2''=-3x_1+4 \end{matrix}\right. \left|\left| \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right.\right.$$

7.9. *Clasifíquense las siguientes transformaciones en E_3:*

$$(a)\ \begin{cases} x'_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2+3 \\ x'_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2-5 \\ x'_3=x_3 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x'_1=3x_1+4 \\ x'_2=3x_2-1 \\ x'_3=3x_3+8 \end{cases}$$

La transformación (*a*) toma la forma

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Congruencia}$$

Además, $|A|=+1 \Rightarrow$ Congruencia directa.

La transformación (*b*) toma la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Se trata de una semejanza directa de razón $\sqrt{k}=3$, y de centro el punto C:

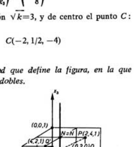
$$\left.\begin{array}{l} x_1=3x_1+4 \Rightarrow x_1=-2 \\ x_2=3x_2-1 \Rightarrow x_2=1/2 \\ x_3=3x_3+8 \Rightarrow x_3=-4 \end{array}\right\} \quad C(-2,\,1/2,\,-4)$$

7.10. *Estúdiese y determínese la afinidad que define la figura, en la que $P \to P'$; $Q \to Q'$ y la recta $\overline{MN}$ es de puntos dobles.*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

O, si se prefiere,

$$y_i=(a_ix_1+b_ix_2+c_ix_3)+p_i$$
$$i=1,2,3$$



Eligiendo dos puntos "cómodos", en la recta $\overline{MN}\equiv x=y=2$, como pueden ser los

$$M(2,2,0)=M'; \qquad N(2,2,1)=N',$$

se calcula:

$$\begin{array}{c|c|c|} (2,0,0)\to(2,4,1) & (0,2,0)\to(4,3,1) & (2,2,0)\to(2,2,0) \\ 2=2a_1+p_1 & 4=2b_1+p_1 & 2=2a_1+2b_1+p_1 \\ 4=2a_2+p_2 & 2=2b_2+p_2 & 2=2a_2+2b_2+p_2 \\ 1=2a_3+p_3 & 1=2b_3+p_3 & 0=2a_3+2b_3+p_3 \end{array}$$

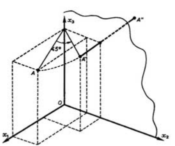
$\Rightarrow p_1=4;\ p_2=4;\ p_3=2;\ a_1=-1;\ a_2=0;\ a_3=-1/2;\ b_1=0;\ b_2=-1;\ b_3=-1/2$

Además, $(2, 2, 1) \rightarrow (2, 2, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} 2=4+2(-1)+2.0+c_1 \\ 2=4+2.0+2(-1)+c_2 \\ 1=2+2(-1/2)+2(-1/2)+c_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1=0 \\ c_2=0 \Rightarrow \mathbf{y}= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ c_3=1 \end{array}\right.$$

Como $|A|=1 \Rightarrow$ Congruencia directa.

7.11. *Establézcase la afinidad, según los datos que aparecen en la figura, como la composición del giro y simetrías indicados.*



$$g \left\{ \begin{array}{l} x_1'=x_1 \cos 45^\circ - x_2 \operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} x_2 \\ x_2'=x_1 \operatorname{sen} 45^\circ + x_2 \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} x_2 \\ x_3'=x_3 \end{array} \right.$$

$$s \left\{ \begin{array}{l} x_1''=-x_1' \\ x_2''=x_2' \\ x_3''=x_3' \end{array} \right. ; \quad s \circ g \left\{ \begin{array}{l} x_1''=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} x_2 \\ x_2''=\dfrac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} x_2 \\ x_3''=x_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A' \times A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $|A|=-1 \Rightarrow$ Congruencia inversa.

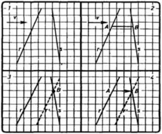
7.12. *Dadas las rectas r y s de la figura, determínese el vector $\overrightarrow{AB} \in \boldsymbol{v}$, cuyos "extremo" y "flecha" se apoyen en las rectas-dato.*

Supuesto el problema resuelto (2), se observa que una traslación de vector $\boldsymbol{v}$ actúa así:

$$r \xrightarrow{t} r'$$
$$A \in r \longrightarrow B \in r'$$

Entonces, $r' \cap s = B$.

Teniendo B (3), basta trazar al vector $\overrightarrow{AB}$ de la clase $\boldsymbol{v}$, como se hace en (4).



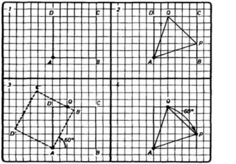
7.13. *Inscríbase un triángulo equilátero en un cuadrado, de modo que tengan un vértice común.*

Supuesto el problema resuelto (2), se observa que un giro

$$g\begin{cases}\text{centro } A\\ \text{amplitud} = +60°\end{cases}$$

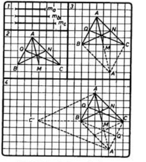
actúa así:

$$P \xrightarrow{g} Q$$
$$\overline{BC} \longrightarrow \overline{B'C'}$$
$$\left.\begin{matrix} Q \in \overline{DC} \\ Q \in \overline{B'C'}\end{matrix}\right\} \; Q = \overline{DC} \cap \overline{B'C'}$$



Entonces, se gira el cuadrado y queda determinado Q (3).
Basta girar Q con centro en A, un ángulo de $-60°$, para obtener P, completando la solución.

7.14. *Constrúyase un triángulo, conocidas sus tres medianas.*



Sean los datos los de (1). Supóngase el problema resuelto, como aparece en (2).

Trácese el triángulo simétrico del ABC, respecto de M, punto medio del lado $\overline{BC}$. Se ha conseguido un paralelogramo $ABA'C$, que se dibuja en (3).

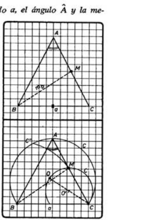
Márquese C', simétrico de C respecto de B, y dibújese el triángulo $C'A'A$, como se hace en (4).

$\overline{C'M}$ es mediana de $C'A'A$, y además, $\overline{C'B}=\overline{BC}=2\cdot\overline{MB}$, lo que significa que B es el baricentro del triángulo $C'A'A$.

$\overline{C'A}=2\cdot\overline{BN}$ (// media de $AC'C$); $\overline{C'A'}=2\cdot\overline{BQ'}=2\cdot\overline{CQ}$ (// media en $CC'A'$); $\overline{AA'}=2\cdot\overline{AM}$.

A la vista de lo anterior, se construye el triángulo $AC'A'$, de lados dobles a las medianas-dato; se marca su baricentro B y se concluye la construcción, dibujando C y uniendo A, B y C.

7.15. *Constrúyase un triángulo con datos el lado a, el ángulo $\hat{A}$ y la mediana m_b.*



1.° Supuesto el problema resuelto, se observan dos cosas:

a) que A pertenece a la circunferencia $\mathcal{C}$ del arco capaz de $\hat{A}$, construido sobre el segmento a;

b) que M es homólogo de A en una homotecia

$$h \left\{ \begin{array}{l} \text{centro } C \\ \text{razón } \sqrt{k}=\dfrac{CM}{CA}=\dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

con lo que

$$\begin{array}{c} \mathcal{C} \xrightarrow{\ h\ } \mathcal{C}' \\ A \longrightarrow M \end{array}$$

2.° El punto M, de otro lado, ha de pertenecer a una circunferencia $\mathcal{C}''$, de centro en B y radio m_b.

3.° A la vista de lo anterior, se concluye:

$$M=\mathcal{C}'\cap\mathcal{C}''$$

7.16. *Dados los vectores no paralelos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{P'Q'}$, homólogos en una semejanza directa, encuéntrese un punto O, centro de esa semejanza.*

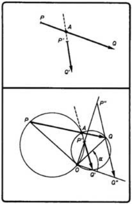
1.° Se determina el punto A.
2.° Se traza la circunferencia determinada por A, P y P'.
3.° Se dibuja la circunferencia a la que pertenecen A, Q y Q'.
4.° Ambas circunferencias se cortan, además, en O.
5.° Los triángulos PQO y $P'Q'O'$ son semejantes:

$$\widehat{OQP}=\widehat{OQ'P'}=\frac{\widehat{AO}}{2}$$

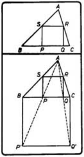
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{OPQ}+\widehat{AP'O}=180^\circ\\ \widehat{OP'Q'}+\widehat{AP'O}=180^\circ\end{array}\right\}\ \widehat{OPQ}=\widehat{OP'Q'}$$

6.° Se concluye: una homotecia de centro O y razón $\sqrt{k}=|\overrightarrow{PQ}|/|\overrightarrow{P'Q'}|$, transforma $\overrightarrow{P'Q'}$ en $\overrightarrow{P''Q''}$; y un giro de centro O y amplitud α, lleva $\overrightarrow{P''Q''}$ a coincidir con $\overrightarrow{PQ}$.

El punto O es el centro de semejanza directa buscado.



7.17. *En el triángulo ABC que se facilita, inscríbase un cuadrado, dos de cuyos vértices consecutivos se encuentren sobre el lado $\overline{BC}$ del triángulo.*



1.° Supóngase conseguida la solución.
2.° Constrúyase un cuadrado $BCP'Q'$.
3.° El cuadrado recién construido es homotético con el pedido, en una homotecia de centro A.
Entonces, P', P y el centro A han de estar alineados; lo mismo que Q', Q y A.
4.° Basta, pues, trazar AP' y AQ'. Los puntos buscados son

$$P=\overline{AP'}\cap\overline{BC}$$
$$Q=\overline{AQ'}\cap\overline{BC}$$

5.° No queda más que completar la construcción $PQRS$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

7.18. Justifíquese que la transformación de ecuaciones

$$x_1' = \frac{1}{2}x_1 + -\frac{3}{2}x_2 + 5$$
$$x_2' = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 6$$

es una congruencia inversa.

7.19. Demuéstrese que la composición de homotecias es otra homotecia.

7.20. Establézcanse las condiciones en E_3, para que una afinidad sea semejanza.

7.21. Caracterícese por su centro y razón, la homotecia

$$x_1' = 3x_1 - 5$$
$$x_2' = 3x_2 + 4$$

7.22. Calcúlese la razón de la semejanza que se establece. Luego descompóngase en producto de una homotecia por un movimiento

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

7.23. Hállense las ecuaciones del giro g_1, de centro $A(4, -4)$ y amplitud arc sen $\frac{3}{5}$.

7.24. Compóngase el giro anterior g_1 con el g_2, de centro $O(0, 0)$ y amplitud $-90°$. Hállense las ecuaciones de $g_2 \circ g_1$ y de $g_1 \circ g_2$ y escríbanse en forma matricial.

7.25. Determínese gráficamente (por descomposición en simetrías) y analíticamente (punto doble) el centro de las composiciones $g_2 \circ g_1$ y $g_1 \circ g_2$, realizadas anteriormente.

7.26. Dada la traslación

$$t: \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y el giro

$$g: \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

caracterícense ambas congruencias por sus elementos invariantes. Después compónganse $g \circ t$ y $t \circ g$.

7.27. Sean las simetrías axiales $s_1 \equiv y = 0$; $s_2 \equiv y = x$; $s_3 \equiv x = 0$; $s_4 \equiv x = 6$.

a) Resuélvase gráficamente la composición $s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4$, determinando el centro y la amplitud del giro g, que resulta.
b) Escríbase en forma matricial esa transformación-giro.
c) Hállese $g(C)$, siendo $C \equiv x^2 + y^2 = 9$.

7.28. Se componen las simetrías de ejes $x = y$ y $x = 4$.

7.41. En E_3, $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{g} \overrightarrow{A'B'}$, siendo $A(1, 1, 2)$; $B(1, 5, 5)$; $A'(1-\sqrt{3}, 5, 2)$; $B'(1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}, 5)$. Determínese el eje de giro y la ecuación matricial de la transformación.

7.42. Movimiento helicoidal es el producto de una traslación por un giro sobre uno de los vectores de la traslación, como eje. Demuéstrese que la composición de ambas congruencias es conmutativa.

7.43. Hállese y estúdiese el grupo de afinidades que deja invariante la hipérbola $xy=1$.

7.44. Determínese la traslación compuesta de las t_1, t_2 y t_3 de vectores respectivos, según los ejes trirrectangulares de E_3.

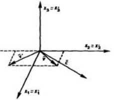
7.45. Establézcase el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de una determinada longitud, cuyos extremos se apoyan sobre dos rectas-dato, que se cruzan bajo ángulo de 90°.

7.46. Se tiene E_3 con una referencia ortonormal, y sobre él se considera la transformación que consiste en proyectar sobre el plano $x_3=0$. Determínese la matriz de la transformación, núcleo y conjunto de vectores que tienen por imagen el $\mathbf{v}=(1, 1, 1)$.

7.47. En E_3 se consideran las simetrías s_1, s_2 y s_3, según los ejes de coordenadas rectangulares. Determínese la composición $s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

7.48. En E_2 se establece una simetría respecto de la recta $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x$, y un giro $(0, \varphi)$. Hállense las ecuaciones de ambas transformaciones, las de sus inversas —si existen—, así como las de las dos composiciones de las directas.

7.49. Sobre el eje OX se tiene una semejanza $x \to x'$, de centro 4 y razón -3. Sobre el OY, otra, $y \to y'$, producto de una simetría (centro $=-4$) y una homotecia (centro$=2$; razón$=3$). Se hace corresponder a cada $P(x, y) \to P'(x', y')$. Hállese la ecuación de la afinidad que tiene por homólogos de $A(1, 1)$ y $B(-5, 2)$, los A' y B', dados por dicha correspondencia, siendo además $(-1, -1)$ invariante.



7.50. En el E_3 de la figura se define una transformación a través del producto vectorial $\mathbf{v}'=\mathbf{v}\wedge\mathbf{c}$, siendo $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3)$ un vector dado. Hállese la ecuación de la transformación y el núcleo. Determínese el vector $\mathbf{v}$ y el subespacio vectorial formado por ellos, para que $\mathbf{v}=(1, 1, 0) \to \mathbf{v}'=(1, -1, 0)$.

8

Funciones reales de variable real

Intervalos abiertos y cerrados

Se llama *intervalo abierto* de extremos a y b (siendo $a<b$) al conjunto de números reales x tales que $a<x<b$; se representa (a, b).
Es decir, $(a, b)=\{x|a<x<b\}$.

Se llama *intervalo cerrado* de extremos a y b (siendo $a<b$) al conjunto de números reales x tales que $a \leqslant x \leqslant b$; se representa $[a, b]$. Es decir,

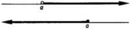
$$[a, b]=\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$$

Se definen también los siguientes *intervalos infinitos:*

$[a, \infty)=\{x|x \geqslant a\}$

$(a, \infty)=\{x|x > a\}$

$(-\infty, a]=\{x|x \leqslant a\}$



$(-\infty, a)=\{x|x < a\}$

Valor absoluto

$$R \xrightarrow{|\ldots|} R^+ \cup \{0\}$$
$$x \longrightarrow |x| = \text{máx. } \{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ -x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Propiedades

(1) $|x|=|-x|$ (2) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ (3) $|x|-|y| \leqslant |x-y|$
(4) $|x \cdot y|=|x|\cdot|y|$ (5) $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$ (6) $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$

Distancia

$$R \times R \xrightarrow{d} R^+ \cup \{0\}$$
$$(x, y) \longrightarrow d(x, y)=|y-x|$$

$$\textit{Condiciones} \begin{cases} 1) & d(x, y) \geqslant 0; \quad d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y \\ 2) & d(x, y)=d(y, x) \\ 3) & d(x, y) \leqslant d(x, z)+d(z, y) \end{cases}$$

Bola *o* **entorno** (de centro a y radio r): $E_r(a)=\{x \in R \,/\, |x-a| < r\}$.
Consecuencia: *Toda bola es un intervalo abierto,* ya que por la (6) del valor absoluto:

$$x \in E_r(a) \Leftrightarrow x \in (a-r, a+r)$$

Relación: $A \xrightarrow{f} B$, es $f=\{(x, y) \in A \times B \,/\, A \times B \subset R \times R\}$.
Dominio de f: $\text{Dom } f=\{x \in A \,/\, \exists y \in B;\ (x, y) \in f\}$
Recorrido de f: $\text{Rec } f=\{y \in B \,/\, \exists x \in A;\ (x. y) \in f\}$

Función uniforme: Toda relación que cumple,

$$\text{si } (x, y) \in f \text{ y } (x, z) \in f \Rightarrow y=z, \text{ por lo que,}$$

Función real de variable real es una aplicación de un subconjunto A del conjunto R en R.

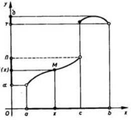
$$\varnothing \neq A \subset R, \quad \begin{array}{l} A \longrightarrow R \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$$

Gráfica de una función $y=f(x)$ es el conjunto de pares $(x, f(x)) \subset R \times R$, que pueden ser "dibujados" en un diagrama cartesiano.
Dominio de una función f es el intervalo de R sobre cuyos elementos actúa f.

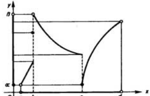
$$\text{Dom } f=A=\{x \in R \,/\, \exists^{\cdot} f(x) \in R\}$$

Recorrido de una función f es el subconjunto de R, formado por todas las imágenes de los elementos de su dominio, según f.

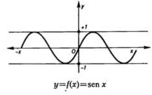
$$\text{Rec } f = f(A) = \{f(x) \in R / x \in A\}$$



dominio $= (a, b)$
recorrido $= (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \delta]$



dominio: (a, d)
recorrido: $[\alpha, \beta)$



dominio: $(-\infty, +\infty)$
recorrido: $[-1, +1]$

$y=f(x)=\text{sen } x$

Los términos *correspondencia, transformación, mapa, operador* y *función* son sinónimos.

Una función f se dice **uno a uno** si es *inyectiva:* $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$.

$$\text{Una función } f \text{ es } \begin{cases} \textbf{de } A \Leftrightarrow \text{Dom } f = A \\ \textbf{sobre } B \Leftrightarrow \text{Rec } f = f(A) = B \\ \textbf{en } B \Leftrightarrow \text{Rec } f = f(A) \subset B \end{cases}$$

Dos funciones f y g se consideran *iguales* solamente si tienen el mismo conjunto inicial, el mismo conjunto final, y $f(x)=g(x)$ $\forall x$ del conjunto inicial.

Dada una función $f: A \to B$, se llama **restricción** de f a $A_1 \subset A$, y se la indica por $f_1 = f|A_1$, a la función $f_1: A_1 \to B$ dada por $f_1(x)=f(x)$ $\forall x \in A_1$; a la función f se la denomina **extensión** de f_1.

Sea $B_1 \subset B$. Se llama **imagen inversa (o recíproca)** de B_1 por f, al conjunto de los elementos de A cuya imagen está contenida en B_1. Se indica: $f^{-1}(B_1)$.

Función inversa de una $f: A \to R$, cuando existe, es la función f^{-1}, tal que:

$$\forall x \in A, \quad f^{-1}[f(x)]=x$$

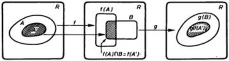
La condición necesaria y suficiente para que una función $f: A \to R$ posea inversa es que sea inyectiva.
Consecuentemente, la inversa es también uno a uno.

Función compuesta (si procede) de dos dadas f y g —y en este orden— es otra función denotada por $h(x)=(g \circ f)(x)=g[f(x)]$

La condición necesaria y suficiente para que sea posible la composición $g \circ f$, es que:

$$\operatorname{Rec} f \cap \operatorname{Dom} g \neq \varnothing$$

Gráficamente:



Se puede escribir $A'=f^{-1}[f(A) \cap B]$ en el sentido que se da a f^{-1} en la teoría de conjuntos, no es que se trate de función inversa de f.

Si $f(A) \cap B \neq \varnothing$ es posible componer, y el dominio de $g \circ f$ es:

$$A'=f^{-1}[f(A) \cap B]=\{x / f(x) \in B\}$$

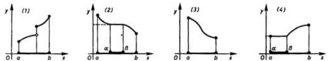
La situación ideal es aquella en que $f(A) \subset B$, en cuyo caso $f(A) \cap B=f(A)$ y, por tanto, el dominio de $g \circ f$ es $A'=f^{-1}[f(A) \cap B]=f^{-1}[f(A)]=A$, o sea, coincide con el dominio de f.

Si $f(A) \not\subset B$, entonces ha de hacerse una restricción de dominio a A'. La función $y=f(x)$ es

par si $f(x)=f(-x)$, $\forall x \in A \quad (A \subseteq \operatorname{Dom} f)$
impar si $f(x)=-f(-x)$, $\forall x \in A$
periódica si $\exists \lambda \in R \,/\, f(x+\lambda)=f(x)$; λ es el periodo;
acotada si $\exists k \in R^{+} \,/\, |f(x)| \leqslant k$, $\forall x \in A$
multiforme: véanse problemas 8.2 y 8.7.

Monotonía en un intervalo, esto es, cuando los $x_i \in [a, b]$:

1) *creciente:* $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
2) *no creciente:* $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
3) *decreciente:* $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
4) *no decreciente:* $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$



La función es constante en el subintervalo $[\alpha, \beta]$ de los casos (2) y (4).

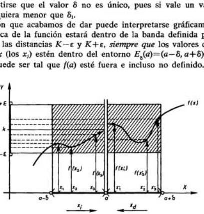
Límite funcional: *Límite de una función en un punto $x=a$,*

$$\lim_{x\to a} f(x)=K \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 \ / <|x_i-a|<\delta \Rightarrow |f(x_i)-K|<\varepsilon$$

El valor $\varepsilon>0$ se fija a voluntad, pero el valor $\delta>0$ viene condicionado por el ε.

Debe advertirse que el valor δ no es único, pues si vale un valor δ_1 también vale cualquiera menor que δ_1.

La definición que acabamos de dar puede interpretarse gráficamente diciendo que la gráfica de la función estará dentro de la banda definida por las paralelas al eje x a las distancias $K-\varepsilon$ y $K+\varepsilon$, *siempre que* los valores considerados de la variable x (los x_i) estén dentro del entorno $E_\delta(a)=(a-\delta, a+\delta)$ *excluido* el punto a que puede ser tal que $f(a)$ esté fuera e incluso no definido.



Casos particulares

$$\lim_{x\to a} f(x)=\begin{cases} +\infty \iff \forall P\in R^+,\ \exists\delta=\delta(P)>0\ /\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>P \\ -\infty \iff \forall N\in R^-,\ \exists\delta=\delta(N)>0\ /\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<N \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases} K \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists M=M(\varepsilon)\in R^+\ /\ x>M \Rightarrow |f(x)-K|<\varepsilon \\ +\infty \iff \forall P\in R^+,\ \exists M=M(P)\in R^+\ /\ x>M \Rightarrow f(x)>P \\ -\infty \iff \forall N\in R^-,\ \exists M=M(N)\in R^+\ /\ x>M \Rightarrow f(x)<N \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases} K \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists m=m(\varepsilon) \in R^- / x<m \Rightarrow |f(x)-K|<\varepsilon \\ +\infty \Leftrightarrow \forall P \in R^+, \exists m=m(P) \in R^- / x<m \Rightarrow f(x)>P \\ -\infty \Leftrightarrow \forall N \in R^-, \exists m=m(N) \in R^- / x<m \Rightarrow f(x)<N \end{cases}$$

$$\boxed{\textbf{Unificación } \lim_{x\to a} f(x)=K \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(K), \exists E_\delta(a) / f(E_\delta(a)-\{a\}) \subset E_\varepsilon(K) \quad \text{donde } a, K \in R=R\cup\{\infty\}=\text{recta complementada.}}$$

Límites laterales

Por la izquierda:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=K_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 / x_i \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x_i) \in E_\varepsilon(K_1)$$

Por la derecha:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=K_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 / x_d \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x_d) \in E_\varepsilon(K_2)$$

Si los límites laterales de una función en un punto son iguales, entonces existe el límite en dicho punto (de la función) y toma ese valor común. La proposición recíproca no es cierta.

Algebra de límites

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)\, g(x))=(\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{A}.$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}=\infty.$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}=0.$$

Si $b>0$ y $\lim_{x\to a} f(x)=A \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} b^{f(x)}=b^A}$

$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$; $b>1 \Rightarrow \lim_{x\to a} b^{f(x)}=+\infty$.

$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$; $b>1 \Rightarrow \lim_{x\to a} b^{f(x)}=0$

$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$; $b<1 \Rightarrow \lim_{x\to a} b^{f(x)}=0$

$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$; $b<1 \Rightarrow \lim_{x\to a} b^{f(x)}=+\infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x)=A>0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} \log_b f(x)=\log_b A}$

$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$; $b>1 \Rightarrow \lim_{x\to a} \log_b f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to a} f(x)=0$; $b>1 \Rightarrow \lim_{x\to a} \log_b f(x)=-\infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x)=A>0 \wedge \lim_{x\to a} g(x)=B \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)}=A^B}$

Indeterminaciones: $\frac{0}{0}$; $\infty-\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; 0^0; ∞^0; 1^∞.

Infinitésimos e infinitos

Una función $f(x)$ es un *infinitésimo en el punto* $a \in \overline{R}$ si $\lim f(x)=0$.

$\boxed{f(x) \text{ y } g(x)\text{: infinitésimos en el punto } a}$

- del <u>mismo orden</u> si: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0$. Para $K=1$ se dicen <u>equivalentes</u>
- $f(x)$ de <u>orden superior</u> respecto de $g(x)$ si: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x)$ de <u>orden n</u> respecto de $g(x)$ si: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{[g(x)]^n} = c$ con $0 < |c| < +\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = K \neq 0$, se llama *parte principal* del infinitésimo $f(x)$ al infinitésimo $K(x-a)^n$.

Notas:

a) Los infinitésimos más cómodos para establecer el orden de uno dado son los binomios $(x-a)^n$ cuando $x \to a$.

b) Dos infinitésimos son equivalentes $\Leftrightarrow$ tienen la misma parte principal.

c) El límite de la razón de dos infinitésimos *no* se altera, si los términos de la misma se sustituyen por otros cuyos valores respectivos sean equivalentes.

Una función $f(x)$ es un *infinito en el punto* $a \in \overline{R}$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x)=\infty$.

Todo lo dicho para los infinitésimos se aplic. forma semejante a los infinitos.

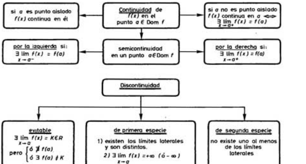
$$\boxed{\text{Cuando } x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \underset{(p>0)}{\text{ord } (Lx)^p} < \underset{(q>0)}{\text{ord } x^q} < \underset{(a>1)}{\text{ord } a^x} < \underset{(r>0)}{\text{ord } x^{rx}}}$$

Equivalencias

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si } \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \\ L\,[1+f(x)] \sim f(x) \\ \text{sen } f(x) \sim f(x) \ \text{tag } f(x) \\ \text{arc sen } f(x) \sim f(x) \sim \text{arc tag } f(x) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si } \lim\limits_{x \to a} f(x) = 1 \text{ y } \lim g(x) = \infty \\ f(x) - 1 \sim L\, f(x) \\ [f(x)]^{g(x)} \sim e^{g(x).[f(x)-1]} \end{array}}$$

$$\boxed{\text{si } x \longrightarrow +\infty \left\{ \begin{array}{l} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \sim a_0x^n \\ L\,(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n) \sim L\,x^n \end{array} \right. \quad (n \in N)}$$



Nota: En el caso (1) de discontinuidad de primera especie, si ambos límites son reales, la diferencia entre ellos (derecha-izquierda) se llama *salto* de la función f en el punto a.

PROBLEMAS RESUELTOS

8.1. *Hállese* $f(x+1)$ sabiendo que $f(x-1)=x^2$.

Según el dato $x-1 \xrightarrow{f} x^2$, luego al elemento $x-1$ le suma 1 y a continuación eleva al cuadrado. Por consiguiente:

$$f(x+1)=(x+2)^2$$

8.2. *Dada la relación* $f=\{(2, -1), (0, 2), (-1, 2), (0, 1), (1, -1)\} \subset R \times R$. Se pide:

1) *Dominio y recorrido.*
2) *¿Es función uniforme? Dedúzcase una restricción suya que sí lo sea.*
3) *Discútase la existencia de una función inversa.*

1) Dom $f=\{-1, 0, 1, 2\}$ Rec $f=\{-1, 1, 2\}$.
2) Como los pares $(0, 2)$ y $(0, 1)$ tienen el mismo primer elemento, pero distinto el segundo $\Rightarrow f$ no es función uniforme.
En cambio $f_1=\{(2, -1), (-1, 2), (1, -1)\}=f|A_1/A_1=\{-1, 1, 2\}$, sí lo es.
3) Al no ser f función uniforme, evidentemente no posee función inversa.

En el caso de f_1, como es función uniforme, bastará averiguar si la relación inversa f_1^{-1} es también uniforme.

Pero $f_1^{-1}=\{(-1,2),(2,-1),(-1,1)\}$ no es función uniforme (el -1 tiene dos imágenes), por lo que tampoco f_1 posee función inversa.

8.3. *Demuéstrese la propiedad* (2) *del valor absoluto.*

Recordemos que supremo de un conjunto es la menor de todas las cotas superiores, y que máximo es el supremo si pertenece al conjunto.

Por lo tanto, máximo $\leqslant$ cualquier cota superior. Teniendo esto en cuenta, de $|x|=\text{máx.}\{x,-x\} \Rightarrow |x|$ es cota superior de $\{x,-x\} \Rightarrow x \leqslant |x|,\ -x \leqslant |x|$ análogamente ocurre con $|y|=\text{máx.}\{y,-y\}$, luego: $y \leqslant |y|,\ -y \leqslant |y|$ sumando ordenadamente: $x+y \leqslant |x|+|y|;\ -(x+y) \leqslant |x|+|y| \Rightarrow |x|+|y|$ es cota superior de $\{x+y, -(x+y)\}$ pero por definición $|x+y|=\text{máx.}\{x+y,-(x+y)\}$ $\Big\} \Rightarrow |x+y| \leqslant |x|+|y|$.

8.4. *Averígüese la paridad de las funciones* $f(x)=L\dfrac{1+x}{1-x}$, $g(x)=x^2-2^{\cos x}$.

$$f(-x)=L\frac{1-x}{1+x}=L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-L\frac{1+x}{1-x}=-f(x) \Rightarrow \text{es función impar}$$

$$g(-x)=(-x)^2-2^{\cos(-x)}=x^2-2^{\cos x}=g(x) \Rightarrow \text{es función par}$$

8.5. *Calcúlese el periodo —si procede— de las* $F(X)=7\cos 5X$, $G(x)=\text{sen}^2 x$.

$$F(X+\lambda)=7\cos 5(X+\lambda)=7\cos(5X+5\lambda)=7\cos(5X+2\pi) \Rightarrow \lambda=2/5\cdot\pi$$

como:

$$\text{sen}(x+2\pi)=\text{sen}[(x+\pi)+\pi]=-\text{sen}(x+\pi)=\text{sen}\, x$$

y al ser

$$G(x)=\text{sen}^2 x=\text{sen}^2(-x)=G(-x),$$

su periodo es: $\lambda=\pi$.

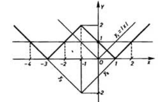
8.6. *Dada la función* $y=f(x)=||x+1|-2|$, *se pide:*

1) *Dom* f; *Rec* f *y su gráfica.*
2) $f^{-1}(1)$.
3) $f^{-1}[f(1)]$.
4) $\{x \in R / f(x) \in [0,1)\}$.
5) *Monotonía y acotación en* $[-2,1]$.

1) Tanto si x es positivo, como negativo o nulo, el criterio de la función es el valor absoluto de un polinomio, por consiguiente:

$$\text{Dom } f=(-\infty,+\infty) \qquad \text{Rec } f=[0,+\infty)$$

Gráfica: Tomamos la $y_1=|x|$ y la desplazamos una unidad hacia la izquierda y dos hacia abajo.



Con esto tenemos la $y_3=|x+1|-2$, y habrá que tomar de esta última todos sus valores menos el dibujo de los $x \in (-3, 1)$, que será el simétrico respecto al eje de las x.

2) $f^{-1}(1)=\{x \in R/f(x)=1\}=\{-4, -2, 0, 2\}$, ya que:

$$||x+1|-2|=1 \begin{cases} |x+1|-2=\ \ 1 \Rightarrow |x+1|=3 \begin{cases} x_1+1=\ \ 3 \Rightarrow x_1=\ \ 2 \\ x_2+1=-3 \Rightarrow x_2=-4 \end{cases} \\ |x'+1|-2=-1 \Rightarrow |x'+1|=1 \begin{cases} x'_1+1=\ \ 1 \Rightarrow x'_1=\ \ 0 \\ x'_2+1=-1 \Rightarrow x'_2=-2 \end{cases} \end{cases}$$

3) $f^{-1}[f(1)]=f^{-1}(0)=\{x \in R/f(x)=0\}=\{-3, 1\} \neq \{1\}$.

4) Por lo deducido en los puntos (2) y (3) anteriores parece ser que el intervalo para que $f(x) \in [0, 1)$ sería el $(-4, 2)$, pero poniendo (véase la figura): $(-4, 2)=(-4, -3] \cup (-3, -1] \cup (-1, 1] \cup (1, 2)$, observamos que en $S_1=(-4, -3]$ la función es monótona decreciente y $f(S_1)=[0, 1)$.

En $S_2=(-3, -1]=(-3, -2) \cup [-2, -1]$, tenemos, por un lado, $f\{[-2, -1]\}=[1, 2]$ y, por otro, $f\{(-3, -2)\}=(0, 1) \Rightarrow (-3, -2)$ es el buscado en S_2, apoyándonos en que aquí f es monótona creciente.

En $S_3=(-1, 1]=(-1, 0] \cup (0, 1]$, f es monótona decreciente y operando de análoga forma que en el caso de $S_2 \Rightarrow (0, 1]$ es el buscado.

En $S_4=(1, 2)$, f es creciente y $f\{(1, 2)\}=(0, 1)$, luego $(1, 2)$ es válido.

En definitiva, $\{x \in R/f(x) \in [0, 1)\}=(-4, -3] \cup (-3, -2) \cup (0, 1] \cup (1, 2)=$
$=(-4, -2) \cup (0, 2)$.

5) Si ponemos $[-2, -1] \cup (-1, 1)=[-2, 1]$, nos fijamos en que, si $x_1, x_2 \in$ $\in [-2, -1]$, siendo $x_1>x_2 \Rightarrow x_1+1>x_2+1$ con ambos miembros negativos, luego

$$|x_1+1|<|x_2+1|, \text{ de donde } |x_1+1|-2<|x_2+1|-2$$

y de nuevo estos dos últimos miembros de la desigualdad son negativos, por lo que, al tomar valores absolutos $\Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f$ es creciente.

De forma análoga se trabaja en el intervalo $(-1, 1)$, saliéndonos en este caso que f es monótona decreciente.

Por la monotonía estudiada, el mayor valor de $f(x)$ será: $f(-1)=2$, y el menor para $x=1$, $f(1)=0$. Entonces $f(x)$ en el intervalo dato está acotada superior e inferiormente $\Rightarrow$ está acotada.

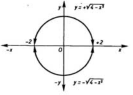
Formalmente podemos poner: $\exists 2 \in R^+/ \ |f(x)| \leqslant 2 \ \ \forall x \in [-2, 1]$.

8.7. *Hállense las ramas y puntos de ramificación de la función multiforme,*

$y^2=4-x^2$

ramas $\begin{cases} y_1=+\sqrt{4-x^2} \\ y_2=+\sqrt{4-x^2} \end{cases}$

puntos de ramificación $\begin{cases} x=+2 \\ x=-2 \end{cases}$



8.8. *Dadas las funciones* $f(x)=x^2+3$ *y* $g(x)=\dfrac{1}{-\sqrt{3-x}}$, se pide:

1) *Análisis de la compuesta.*
2) *Hallar sus inversas.*

1) Tenemos

$$\begin{array}{ll} \text{Dom } f=(-\infty, +\infty) & \textit{Rec } f=[3, +\infty) \\ \text{Dom } g=(-\infty, 3) & \text{Rec } g=(-\infty, 0) \end{array}$$

de donde

$$\text{Rec } f \cap \text{Dom } g=\varnothing \quad \text{y} \quad \text{Rec } g \cap \text{Dom } f=(-\infty, 0),$$

por tanto, sólo procede hablar de la función $h=f \circ g$, y su criterio será:

$$h(x)=f[g(x)]=f\left(\frac{1}{-\sqrt{3-x}}\right)=\left(\frac{1}{-\sqrt{3-x}}\right)^2+3=\frac{1}{3-x}+3=\frac{10-3x}{3-x}$$

Además, $\text{Dom } h=g^{-1}(\text{Rec } g \cap \text{Dom } f)=\{x \in R/g(x)=(-\infty, 0)\}=(-\infty, 3)$

Notemos que este dominio de h lo es como función compuesta de las dadas y no como función individual.

2) $f(x_1)=12=f(x_2) \Rightarrow x_1=3 \neq -3=x_2 \Rightarrow f$ no es inyectiva.

$$g(x)=g(x') \Rightarrow -\sqrt{3-x}=-\sqrt{3-x'} \Leftrightarrow 3-x=3-x' \Leftrightarrow x=x'$$

por tanto, g es inyectiva $\Rightarrow$ posee inversa.

Llamando $y=\dfrac{1}{-\sqrt{3-x}} \Rightarrow y^2(3-x)=1$, $3y^2-1=y^2x$, $x=3-\dfrac{1}{y^2}$; cambiando ahora la y por la $x \Rightarrow g^{-1}(x)=y=3-\dfrac{1}{x^2}$, donde

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dom } g^{-1}=\text{Rec } g=(-\infty, 0) \\ \text{Rec } g^{-1}=\text{Dom } g=(-\infty, 3) \end{array}\right\} \text{como función inversa de la dada.}$$

8.9. *Dedúzcase el dominio de la función* $h(x)=\sqrt{x-x^3}$.

Los valores de h existen siempre que $x-x^3=x(1-x^2)\geqslant 0$.
Estudiemos en primer lugar los que hacen positiva esa expresión, serán:

a) $x>0$ y $1-x^2>0 \Rightarrow x>0$ y $1>x^2$, $x>0$ y $1>|x|$, luego $x\in(0,1)$
b) $x<0$ y $1-x^2<0 \Rightarrow x<0$ y $1<x^2$, $x<0$ y $1<|x|$, luego $x\in(-\infty,-1)$

En segundo lugar, los $x\in\{-1,0,1\}$ anulan dicha expresión.

$$\text{Dom } h=(-\infty,-1]\cup[0,1]$$

8.10. *Pruébese que*

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\neq g(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$$

En efecto,

$$\text{Dom } f=(-\infty,-2)\cup[-1,+\infty)$$

La función g es el cociente de dos funciones, por lo tanto su dominio será la intersección de los dominios de ellas, salvo los valores que anulen al denominador. Entonces,

$$(\text{Dom } \sqrt{x+1})\cap(\text{Dom } \sqrt{x+2})-\{-2\}=[-1,+\infty)\cap [-2,+\infty)-\{-2\}=[-1,+\infty)$$

evidentemente Dom $f\neq$ Dom g. Por ejemplo, $g(-3)\nexists$ y en cambio $f(-3)=\sqrt{2}$.

8.11. *Hállese y compruébese el límite de* $f(x)=5x+7$ *en el punto* $a=2$.

$x_i\in(a-\delta,a)$:	$x_1=1{,}8$	$x_2=1{,}98$	$x_3=1{,}9997$ ... se aproximan a 2
$f(x_i)$ $\rightarrow$	16	16,9	16,9985 ... se aproximan a 17
$x_d\in(a,a+\delta)$:	$x_1'=2{,}1$	$x_2'=2{,}01$	$x_3'=2{,}0001$ ... se aproximan a 2
$f(x_d)$ $\rightarrow$	17,5	17,05	17,0005 ... se aproximan a 17

intuitivamente pues, *tanto* por la izquierda *como* por la derecha, los *valores funcionales* se aproximan a *una* constante: 17, cuando estudiamos los puntos muy próximos al 2, pero *nunca* el $a=2$.

A esa constante *común* se la llama "límite de la función" en el punto *a*. Veámoslo ahora formalmente,

$$|f(x)-17|=|5x+7-17|=|5(x-2)|=5|x-2|<5\delta$$

bastará tomar $\varepsilon=5\delta$ y entonces:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\varepsilon/5>0\ /\ 0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-17|<\varepsilon$$

el que $f(2)=17$ es pura coincidencia. Es que en este caso la función dada es continua en el punto $a=2$.

8.12. *Demuéstrese que*

1) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2-3x+1)=-1$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2+1)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{x-2}=-\infty$

y calcúlese el δ *para que* $f(x)<-10^7$.

1) $|x^2-3x+1-(-1)|=|x^2-3x+2|=|(x-1)(x-2)|=|x-1|\cdot|x-2| \leqslant$
$\leqslant |x-1|(|x|+2)<\delta(\delta+1)$
ya que de $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |x|-1 \leqslant |x-1|<\delta \Rightarrow |x|<\delta+1$.

Llamando $\delta(\delta+1)=\varepsilon \Rightarrow \delta^2+\delta-\varepsilon=0$, de donde

$$\delta=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}$$

pero $\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \sqrt{1+4\varepsilon}>1>0$, y como el radio δ de la bola debe ser positivo $\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\dfrac{\sqrt{1+4\varepsilon}-1}{2}>0$.

En definitiva:

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}-1}{2}>0 \,/\, 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |x^2-3x+1-(-1)|<\varepsilon$$

2) $f(x)=3x^2+1>P\in R^+ \Rightarrow x^2>\dfrac{1}{3}(P-1 \Rightarrow x>\sqrt{\dfrac{P-1}{3}}$ o $x<-\sqrt{\dfrac{P-1}{3}}$
tomando la segunda (pues $x \to -\infty$)

$$3x^2+1>P \qquad \forall x<-\sqrt{\frac{P-1}{3}}$$

y podemos poner:

$$\forall P\in \mathrm{R}^+, \exists m=-\sqrt{\frac{P-1}{3}}\in R^- \,/\, x<m \Rightarrow 3x^2+1>P$$

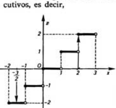
3) de $f(x)=\dfrac{3}{x-2}<N\in R^- \Rightarrow \dfrac{x-2}{3}>\dfrac{1}{N}$, $x-2>\dfrac{3}{N}$, de donde $-(x-2)<\dfrac{3}{-N}>0$; luego, si tomamos $\delta=\dfrac{3}{-N}>0$, nos queda:

$$\forall N\in R^- \;\; \exists\delta=\frac{3}{-N}>0 \,/\, x\in(2-\delta, 2) \Rightarrow \frac{3}{x-2}<N$$

Tomando ahora $N=-10^7 \qquad \delta=3\cdot10^{-7}=0{,}000\,000\,3$.

8.13. *Estúdiese la continuidad de la función $f(x)=[x]=E(x)$, llamada "parte entera de x".*

Sabemos que todo número real está comprendido entre dos enteros consecutivos, es decir,



$$\forall x \in R,\ \exists z \in Z \ /\ z \leqslant x < z+1 \quad \text{o} \quad x \in [z, z+1)$$

entonces se define:

$$R \xrightarrow{\ f\ } R \qquad \text{esto es,} \qquad R \xrightarrow{\ f\ } Z$$
$$x \longrightarrow [x]=z \qquad\qquad x \longrightarrow [x]=z$$

y la función "parte entera de x" es de R sobre Z.

En el punto $a=-3/2$, ocurre

$$\left.\begin{array}{r} \text{(izquierda)} \ \lim\limits_{x \to a^-} [x]=-2 \\ \text{(derecha)} \ \lim\limits_{x \to a^+} [x]=-2 \end{array}\right\} \text{son iguales} \Rightarrow \lim_{x \to -3/2} [x]=-2;$$

pero $f(a)=-2$, luego $f(x)=[x]$ es continua en $a=-3/2$.

En el punto $p=2$, ocurre que $f(2)=2$;

$$\begin{array}{r} \text{(izquierda)} \ \lim\limits_{x \to 2^-} [x]=1 \\ \text{(derecha)} \ \lim\limits_{x \to 2^+} [x]=2 \end{array} \quad \text{(véase la figura)}$$

$\Rightarrow$ los límites laterales en $p=2$ son distintos, por lo que $\nexists \lim\limits_{x \to 2} [x] \Rightarrow$ es discontinua de primera especie y de *salto* 1.

De la misma manera se estudian los demás puntos, clasificándolos en enteros y no enteros, con lo cual la función parte entera es discontinua de primera especie en los puntos de abscisa entera y continua en los restantes, es decir, en $R-Z$.

8.14. *Analícese la discontinuidad de la función $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$.*

$$g(-1)=\frac{-2}{0} \quad \text{y} \quad g(1)=\frac{0}{0}, \quad \text{luego} \quad x_1=-1, \quad x_2=1$$

son puntos de discontinuidad.

Estudiemos el $x_2=1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x \to 1} x-\lim\limits_{x \to 1} 1}{\lim\limits_{x \to 1} x^2-\lim\limits_{x \to 1} 1}=\frac{0}{0} \quad \textbf{indet.} \text{ Eligiendo } f(x)=\frac{x-1}{x+1},$$

(1.°), $f(x) \neq g(x)$; (2.°), $f(x_i)=g(x_i)$ en las proximidades del $x_2=1$.

En efecto, en primer lugar $f(1)=\frac{1}{2}$ y en cambio $g(1)$ no existe; y en segundo lugar, si tomamos $0 \neq h > 0$ con $h \to 0$, tenemos:

$$f(1+h)=\frac{1}{2+h}=g(1+h)=\frac{h}{h(2+h)} \quad f(1-h)=\frac{1}{2-h}=g(1-h)=\frac{-h}{-h(2-h)}$$

luego, $f(x_i)=g(x_i)$ si $x_i \in (1-h, 1+h)-\{1\}$, por tanto, si

$$\exists \lim_{x \to x_2} f(x)=K \Rightarrow \lim_{x \to x_2} g(x)=k \quad \text{pues} \quad |g(x_i)-K|=|g(x_i)-K|$$

Como el $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} g(x)=\dfrac{1}{2}$. Con todo esto, la función dada $g(x)$, en el punto $x_2=1$, tiene una discontinuidad evitable.

Sea ahora $x_1=-1$.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x^3-1}=\frac{\lim\limits_{x \to -1} x-\lim\limits_{x \to -1} 1}{\lim\limits_{x \to -1} x^3-\lim\limits_{x \to -1} 1}=\frac{-2}{0} \quad \text{y parece que el límite sea } -\infty.$$

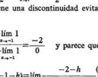
Pero,

$$\lim_{x \to -1^-} g(x)=\lim_{h \to 0} g(-1-h)=\lim_{h \to 0} \frac{-2-h}{(-2-h)\cdot(-h)} \overset{(a)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{-h}=-\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} g(x)=\lim_{h \to 0} g(-1+h)=\lim_{h \to 0} \frac{-2+h}{(-2+h)\cdot h} \overset{(a)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{+h}=+\infty$$

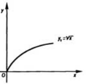
luego los límites laterales son distintos y, por tanto, no posee límite en el punto $x_1=-1$.

En $x_1=-1$ tiene una discontinuidad de primera especie con salto infinito. Gráficamente,

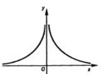


Nota. En este último caso hemos factorizado $g(x)$ al hallar los límites laterales (es más cómodo), y las igualdades (*a*) son ciertas al aplicar el resultado del caso precedente cuando estudiábamos el punto $x_2=1$.

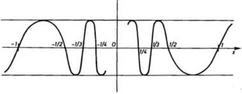
8.15. *Discontinuidades de las funciones* $y_1=\sqrt{x}$, $y_2=\dfrac{\operatorname{sen} 1/x}{1+e^{1/x}}$, $y_3=\dfrac{1}{x^2}$ en $x=0$.



Semicontinua por la derecha.



Discontinua de primera especie.



$\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\operatorname{sen} 1/x}{1+e^{1/x}}=0$, pues $|\operatorname{sen}\ 1/x| \leqslant 1$ y $\lim\limits_{x\to 0_+} e^{1/x}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{\operatorname{sen}\ 1/x}{1+e^{1}/x}$ no existe, pues $\lim\limits_{x\to 0_-} e^{1/x}=0$ y el sen $1/x$ ni está definido ni tiene límite en $x=0$.

La función y_2 tiene en $x=0$ una discontinuidad de segunda especie.

8.16. *Demuéstrese que si $f(x)$ es continua en $x=a$, también lo es la $|f(x)|$.*

Evidentemente, $|f(x)|$ para $x=a$ es $|f(a)|$. Veamos si también este valor coincide con su límite en dicho punto.

Sabemos, por una propiedad del valor absoluto, que,

$$||f(x)|-|f(a)|| \leqslant |f(x)-f(a)|$$

pero por dato: $\lim f(x)=f(a)$, luego $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, en definitiva,

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 \ / \ |x-a|<\delta \Rightarrow ||f(x)|-|f(a)||<\varepsilon,$$

que es la definición de función continua en $x=$a.

8.17. *Sean $f(x)=x^2+x-2$ y $g(x)=x^2-4x+3$. Averigüese,*

1) ***dónde*** *son infinitésimos simultáneamente,*
2) *sus órdenes y partes principales.*

1) Como ambas funciones son polinómicas bastará hallar sus ceros y elegir los comunes.

$$\{x \in R/f(x)=0\} \cap \{x \in R/g(x)=0\}=\{-2, 1\} \cap \{1, 3\}=\{1\}$$

pues, al ser continuas, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)=0$

2) Lo haremos sólo para $x=1$, los otros casos son análogos.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-3}=\frac{3}{-2}\neq 0,$$

en tal caso, $f(x)$ y $g(x)$ son del mismo orden en $x=1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^n}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^n}=3 \text{ si } n=1 \Rightarrow \operatorname{ord} f(x)=1 \text{ en } x=1$$

y, por lo anterior, $\Rightarrow \operatorname{ord} g(x)=1$ en $x=1$.
Parte principal del $f(x)$ es: $3(x-1)$; y la de $g(x)$ será: $-2(x-1)$.

8.18. *Pruébense las equivalencias: $L(1+x)\sim x$, cuando $x\to 0$; y si $n\in N$, $L(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)\sim Lx^n$ si $x\to+\infty$.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{L(1+x)}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}L(1+x)^{1/x}=L\{\lim_{x\to 1}(1+x)^{1/x}\}=L\,e=1$$

Llamando, por comodidad, $H(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$; para probar esa equivalencia bastará probar que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{L\,H(x)}{Lx^n}-1\right)=0, \text{ entonces } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{L\,H(x)}{L\,x^n}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{L\,H(x)-L\,x^n}{L\,x^n}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{L\dfrac{H(x)}{x^n}}{L\,x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_n}{x^n}\right)}{n\cdot L\,x}=\frac{L\,a_0}{+\infty}=0$$

8.19. *Estúdiese la función $f(x)=x\cdot e^{1/x}$ en las proximidades de $x=0$.*

Desde luego, es discontinua en $x=0$, pues $f(0)=0\cdot e^{\infty}=0\cdot\infty$, y su límite en dicho punto nos da esa indeterminación.

$$\lim_{x\to 0_-}x\cdot e^{1/x}=\lim_{h\to 0}(-h\cdot e^{-1/h})=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{e^{1/h}}=\frac{-0}{+\infty}=0 \text{ negativamente}$$

En cuanto al límite por la derecha, observemos que si $x\to 0^+\Rightarrow\dfrac{1}{x}=z\to+\infty$, luego, $\lim_{x\to 0^+}x\cdot e^{1/x}=\lim_{z\to+\infty}\dfrac{e^z}{z}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$, pero el infinito exponencial es de mayor orden que el potencial, por tanto: $\lim_{z\to+\infty}\dfrac{e^z}{z}=+\infty$. En consecuencia, $f(x)$ es discontinua de primera especie, y su gráfica se irá acercando a cero negativamente por la izquierda, y aparecerá por $+\infty$ de las y positivas decreciendo.

8.20. Ejemplos de cálculo de límites

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}+1}{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{\dfrac{1}{3}}=3$$

2) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{3}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{arc tag } 2x}{\text{sen } 3x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{2} = 2/3$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = 0/0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cdot \text{sen}^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} \sim \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \text{sen}\,\dfrac{1}{x}$, en principio no existe, porque $\text{sen}\,\dfrac{1}{x}$ para $x=0$ no está determinado; pero $\left|\text{sen}\,\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$, de donde el límite pedido es: $0\cdot$acotado$=0$

6) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\text{tag}\,\pi x}{x+1} = 0/0 = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\text{tag}\,(\pi x+\pi)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\text{tag}\,\pi(x+1)}{x+1} =$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{si } x\to -1 \\ y=x+1\to 0 \end{matrix} \right\} = \lim_{y\to 0} \frac{\text{tag}\,\pi y}{y} = 0/0 \sim \lim_{y\to 0} \frac{\pi y}{y} = \pi$$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = 0/0 = (\text{como } \lim\limits_{x\to 0} a^x = 1,\ a^x - 1 \sim La^x) \sim \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot La}{x} = La$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \text{arc tag}\,\dfrac{x}{2}}{\cos x\,(\text{sen } 2x)^2} = \dfrac{0\cdot 0}{1\cdot 0} = 0/0 \sim \lim \dfrac{x\cdot \dfrac{x}{2}}{1\cdot (2x)^2} = \dfrac{1}{8}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty =$(se debe buscar la forma del número e)$\sim$

$$\sim e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\cos 3x - 1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\cdot\left(-2\cdot\text{sen}^2 \frac{3x}{2}\right)} =$$

$$= e^{0/0} \sim e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\left(\frac{3x}{2}\right)^2}{x^2}} = e^{-9/2}$$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \text{ sen}\,\dfrac{1}{x}}{\text{sen } x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x}{\text{sen } x}\cdot x \text{ sen}\,\dfrac{1}{x}\right] = 1\cdot 0 = 0$
(Véase el ejemplo 5.)

11) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\text{sen } x}{x+\cos x} = \dfrac{?}{¿} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{\text{sen } x}{x}}{1+\dfrac{\cos x}{x}} =$(no tienen límite $\text{sen } x$, $\cos x$; pero están acotados)$= \dfrac{1+0}{1+0} = 1$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-2x+1}{2x^3+x^2} = \dfrac{\infty-\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3\left(1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$

$$= \text{también directamente} \sim \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \tfrac{1}{2}$$

13) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}=1^\infty\sim e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}[(a^x-1)+(b^x-1)]}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}(a^x-1)}\cdot e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}(b^x-1)}=\text{(véase el ejemplo 7)}$$

$$\sim e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}La^x}\cdot e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}Lb^x}=e^{1/2\cdot La}\cdot e^{1/2\cdot Lb}=\sqrt{a\cdot b}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

8.21. Fíjense los dominios de las siguientes funciones,

a) $\sqrt{x^2+2x-3}$ *b)* $L(1-x^2)$ *c)* $13-L2(x-1)$ *d)* $L(Lx)$
e) sen (Lx) *f)* $L(\text{sen } x)$ *g)* sen (tag x) *h)* tag x^2

8.22. Dada la función $f(x)=\text{sen } x$, determínense los intervalos:

1) $f^{-1}(0)$ 2) $f^{-1}[f(\pi/2)]$ 3) $f^{-1}(\{x\in R/|x|\leqslant 1/2\})$

8.23. Dedúzcase el dominio, recorrido y la posibilidad de la existencia de función inversa, en cada una de las funciones:

a) $\sqrt{x^2-2}$ *b)* $x\sqrt{x^2-2}$ *c)* $\sqrt{\text{sen } 2x}$ *d)* $L\dfrac{2+x}{2-x}$
e) arc cos $\dfrac{2x}{1+x}$ *f)* $\sqrt[3]{1-x^3}$ *g)* $2^{\cos x}$

8.24. Determínese cuáles de las siguientes funciones son pares, cuáles impares y, en las que proceda, hállese su período.

1) a^x+a^{-x} 2) $L(x+\sqrt{1+x^2})$ 3) 5 tag $3x$ 4) sen $\sqrt{x}$
5) $\sqrt{\text{tag } x}$ 6) sen $3x-\cos 2x$ 7) $3^{\cos 3x}$ 8) $|x|$

8.25. Pruébese que $|x|\leqslant a \Longleftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$.

8.26. Sea $f(p)$ la suma de p términos de una progresión aritmética. Pruébese que:

$$f(p+3)-3f(p+2)+3f(p+1)-f(p)=0$$

8.27. Hállense: dominio, recorrido, gráfica y función inversa de,

1) $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$ 2) $g(x)=x\cdot|x|$

8.28. Determínense las ramas y puntos de ramificación de las funciones:

a) x^2 *b)* e^x *c)* arc sen $2x$

8.29. Dada la función $f(x)=x^2+2x-3$, se pide:

1) $f^{-1}(5)$ 2) $f^{-1}([-3,0))$ 3) Monotonía y acotación en $(-2,0]$

8.30. *Estúdiese la composición de los siguientes pares de funciones:*

1) $f(x)=x^2, \quad g(x)=\operatorname{sen} x$ 2) $f(x)=\sqrt{x}, \quad g(x)=Lx$ 3) $F(x)=2-x^2, \quad G(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x-2}}$

determinando —si procede— el dominio de la compuesta.

8.31. Demuéstrese, haciendo uso de la correspondiente definición, que:

a) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-2x+7)=6$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}=0$ *c)* $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2-x)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-x^2)=-\infty$ *e)* $\lim\limits_{x\to 7^+} \dfrac{2x}{x-7}=+\infty$ *f)* $\lim\limits_{x\to 4} (-\sqrt{x})=-2$

8.32. Hállese el orden, parte principal y compárense los infinitésimos,

1) $f(x)=2x^2-3x, \quad g(x)=5x^4-7x^2, \quad h(x)=9x^2-3x^4$ en $x=0$

2) $F(x)=(x-2)^3-4(x-2)^2, \quad G(x)=2x^2-11x+3$ en $x=2$

3) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}, \; g(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}, \quad h(x)=\dfrac{2x}{1+x}$ en $x=0$

8.33. Calcúlense los límites que se indican:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$ 5) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tag}\dfrac{\pi}{2}x$ 6) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} 2x\cdot\operatorname{ctg}(\pi/2-x)$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} 2x}{x+\operatorname{sen} 3x}$ 11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)\sqrt{1-\cos x}$ 13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3\operatorname{tg}^5 2x}{(1-\cos x)^4}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^3 x\operatorname{tg}^2 5x\cdot 4x}{2x^3+5x^4}$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-4x^3}{1-\cos 2x}$ 16) $\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-1}{2\operatorname{sen}^2 x-3\operatorname{sen} x+1}$ 17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-(1+\cos x)^2}{x\cdot\operatorname{tag} x}$

18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Sh} x}{x}$ 19) $\lim\limits_{x\to 0} (1/x^2)\cdot L\cos x$ 20) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos ax)^{1/x^2}$ 21) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x-1}$

22) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{ctg} x}$ 23) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1})$

24) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+ax+b}-x)$ 25) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+x}\right)^{\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)}$

26) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+1/x}{b^x+1/x}\right)^{1/x^2}$ 27) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{p\cdot a^x+q\cdot b^x}{p+q}\right)^{1/x}$

8.34. Dedúzcanse los intervalos de continuidad y los tipos de discontinuidad —si los hubiera— de las funciones que se indican, todas son $y=f(x)$.

1) $\operatorname{tag} x$	2) $\operatorname{cosec} x$	3) $L(1-x^2)$	4) $\dfrac{x}{\lvert x\rvert}$
5) $\operatorname{Th} x$	6) $L\left\lvert \operatorname{tag}\dfrac{x}{2}\right\rvert$	7) $x\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$	8) $\dfrac{1-\cos x}{x}$
9) $\dfrac{x^2}{x-2}$	10) $\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$	11) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$	12) $L(\cos x)$
13) $\operatorname{arc\,tag}\dfrac{1}{x-1}$	14) $\dfrac{x^3-1}{\lvert x-1\rvert}$	15) $\sqrt{x^2-9}$	16) $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}}$
17) $x\cdot\lvert x\rvert$	18) $[x]^2$	19) $\cos x - x$	20) $\dfrac{2\pi-x}{\cos x-1}$

9

Aproximación lineal. Derivada y diferencial

Aproximación

Las funciones f y g presentan una aproximación de orden n en el punto $x=a$, si y sólo si:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ f(a)=g(a) \\ 2)\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-g(a+h)}{h^{n+1}} \neq 0 \end{array}} \qquad [1]$$

También se dice que f y g presentan en a una *tangencia de orden n*. La idea intuitiva de tangencia recta-curva coincide con la llamada *aproximación lineal*, o aproximación con orden de tangencia $n=1$.

Condiciones equivalentes a las recuadradas son:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Dos funciones } f \text{ y } g,\ n \text{ veces derivables en el punto } a, \\ \text{presentan tangencia de orden } n \text{ en ese punto, si:} \\ f(a)=g(a);\ f'(a)=g'(a);\ f''(a)=g''(a);\ \ldots;\ f^{(n}a=g^{(n}a \end{array}} \qquad [2]$$

Derivada de una función en un punto a

$$[3] \qquad \boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \qquad [3']$$

El número $f'(a)$ coincide con la pendiente m de la recta tangente a $f(x)$ en $T(a, f(a))$.

La recta $t \equiv y-f(a)=f'(a)(x-a)$ tiene una aproximación o ajuste con $f(x)$ en

a, de orden $\geqslant 1$; cualquiera otra recta que contenga a T presenta un contacto de orden 0 (es secante).

Función derivada

Una función es derivable en a, si existe el límite [3, 3']; lo es en (a, b), si existe el límite [3, 3'], $\forall x \in (a, b)$. En general, y en diversas notaciones,

$$\boxed{y' = f'(x) = Df = \frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \forall x \in \text{dominio}}$$

Derivada y continuidad

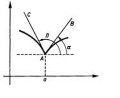
$$\boxed{\begin{array}{l} y=f(x) \text{ derivable en } a \\ \exists \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{array}} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} y=f(x) \text{ continua en } a \\ \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \end{array}}$$

Derivadas laterales

Una función como la de la figura, presenta un "punto anguloso" en A, y tiene dos semitangentes. Consecuentemente tiene derivadas distintas, a la derecha y a la izquierda:

$$f'(a_+) = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a_-) = \operatorname{tg} \beta = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



(Véase problema 9.)

Funciones no derivables

La función f es derivable en a, si $f'(a_-) = f'(a_+)$. Hay funciones no derivables en a, porque: 1.°, $f(a_-) \neq f(a_+)$; 2.°, no existe alguna de las laterales; 3.°, no existe ninguna de las dos, como es el caso $y = x \cdot \operatorname{sen} \pi/x$, para $x \neq 0$.

$$\nexists \lim_{x \to 0_+} \frac{x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x \to 0_+} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}; \quad \nexists \lim_{x \to 0_-} \frac{x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x \to 0_-} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

Derivación

Función $=f(x)$	*Derivadas* $=f'(x)$	*Función* $=f(x)$	*Derivadas* $=f'(x)$
K (constante)	0	arc cos x	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1		
x^m	$m\,x^{m-1}$	arc tg x	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		
sen x	cos x	arc ctg x	$\dfrac{-1}{1+x^2}$
cos x	$-$sen x		
tg x	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	arg Sh x	$\dfrac{1}{+\sqrt{x^2+1}}$
ctg x	$-\dfrac{1}{\text{sen}^2\, x}$	arg Ch x	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$
Sh x	$\text{Ch}^2\, x$	arg Th x	$\dfrac{1}{1-x^2}$
Ch x	Sh x		
Th x	$\dfrac{1}{\text{Ch}^2\, x}$	arg Ctgh x	$\dfrac{1}{1-x^2}$
Cgh x	$\dfrac{-1}{\text{Sh}^2\, x}$	$u(x)\pm v(x)$	$u'(x)\pm v'(x)$
		$u(x)\cdot v(x)$	$u'v+uv'$
L x	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$\log_a\, x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e$	$u[v(x)]$	$u'(v)\cdot v'(x)$
a^x	a^x L a	L $u(x)$	$\dfrac{u'}{u}$
e^x	e^x		
arc sen x	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$a^{u(x)}$	$a^u\cdot u'\cdot$ L a
		$u(x)^a$	$a\,u^{a-1}\cdot u'$

Derivada de la función inversa

Las funciones f y g son inversas, es decir: $g\circ f=f\circ g=I$. Entonces

$$g'(x)=\frac{1}{f'(x)}$$

Este resultado resulta con frecuencia muy cómodo, como puede apreciarse en el problema 9.11.

Derivadas sucesivas

$$y=f(x)\xrightarrow{D}y'=f'(x)\xrightarrow{D}y''=f''(x)\ldots\xrightarrow{D}y^{(n}=f^{(n}(x)$$

o bien

$$y=f(x)\xrightarrow{D}y'=\frac{dy}{dx}\xrightarrow{D}y''=\frac{d^2y}{dx^2}\ldots\xrightarrow{D}y^{(n}=\frac{d^{(n}y}{dx^n}$$

A la derivada de $y=f(x)$ se le llama *primera derivada*; a la de ésta, si existe, *segunda derivada*; y así, caso de existir todas, hasta la $n-1$, a la derivada de ésta, se la llama *derivada de orden n*, supuesta su existencia, en el punto, intervalo o dominio del que se esté hablando.

Derivación implícita

Véanse problemas 9.15 y 9.16.

Derivadas de funciones paramétricas

Siendo $x=f(t)$ e $y=g(t)$, las derivadas primera y segunda toman las formas:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)};\qquad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g''(t)\cdot f'(t)-f''(t)\cdot g'(t)}{[f'(t)]^3}$$

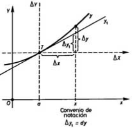
Diferencial

En un punto a	Función diferencial
$R\longrightarrow R$	$R\longrightarrow R$
$t\longrightarrow f'(a).t$	$t\longrightarrow f'(x).t$
$\boxed{dy=f'(a).dt}$	$\boxed{dy=f'(x)dx}$

El interés científico de considerar la diferencial en un punto, procede de que el siguiente límite es cero:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)-f'(a)\Delta x}{\Delta x}=0$$

Eso es debido a la tangencia de las funciones y e y_t. Para incrementos de x "pequeños", la diferencia de incrementos de la función y de la diferencial es



de orden inferior. En consecuencia, puede manejarse la sencilla ley diferencial en lugar de la función, sin incurrir en error excesivo. (Véase el problema 9.22.)

Curva osculatriz y radio de curvatura

Curva osculatriz de una determinada familia $G(x)$ a una función $f(x)$ en un punto a, es la $g(x) \in G(x)$, de mayor aproximación o ajuste a $f(x)$ en a.

Radio de curvatura de la función en el punto a es el radio de su circunferencia osculatriz en ese punto. Su valor es:

Coordenadas cartesianas	*Coordenadas paramétricas*	*Coordenadas polares*
$y=f(x)$	$x=f(t)$ $y=g(t)$	$\rho=f(\omega)$
$r=\left\lvert \dfrac{\sqrt{[1+(f')^2]^3}}{f''} \right\rvert$	$r=\left\lvert \dfrac{\sqrt{(f'^2+g'^2)^3}}{\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}} \right\rvert$	$r=\left\lvert \dfrac{\sqrt{(\rho^2+\rho'^2)^3}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\cdot\rho''} \right\rvert$

Forma implícita: $f(x, y)=0$

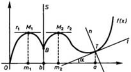
$$r=\left\lvert \frac{\sqrt{(f_x'^2+f_y'^2)^3}}{A} \right\rvert, \text{ en la que } A=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix}$$

Curvatura K, de una curva en un punto A es el inverso del radio de curvatura, considerado con su signo:

$$K=\frac{1}{r}$$

Tangente y normal

$$y=f(x)$$



Tangente en T

$$\left.\begin{array}{l}(a, f(a)) \in t \\ m_t=\operatorname{tg}\alpha=f'(a)\end{array}\right\} t=y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$$

Normal en T

$$n \perp t \Rightarrow n=y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}\cdot(x-a)$$

En M_1 y en M_2,

$$\begin{array}{ccc} f'(m_1) & = & f'(m_2)=0 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ r_1=y=f(m_1); & & r_2=y=f(m_2) \end{array}$$

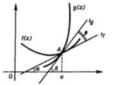
En B,

$$\lim_{x\to b} f'(x)=\infty \quad \Rightarrow s=x=b$$

Angulo de dos curvas

Angulo de dos curvas que se cortan en A=ángulo que forman sus tangentes en A.

$$\begin{array}{l} m_1=\operatorname{tg}\alpha=f'(a) \\ m_2=\operatorname{tg}\beta=g'(a) \\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{f'(a)-g'(a)}{1+f'(a)\cdot g'(a)} \end{array}$$



Angulo de la tangente con el radio polar en el punto de tangencia

$$\operatorname{tg}\psi=\rho\cdot\frac{d\omega}{d\rho}=\frac{\rho}{\rho'}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

9.1. *Hállese una parábola del tipo $y=x^2+bx+c$, que sea tangente a la curva $y=(x-1)^3$, en el punto $x=1$.*

Procedimiento primero:

$$f(1)=(1-1)^3=0=g(1)=1+b+c \Rightarrow \boxed{b+c=-1}$$

La tangencia del enunciado es de orden de aproximación 1, por tanto:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h-1)^3-[(1+h)^2+b(1+h)+c]}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3-(2+b)h-(1+b+c)-h^2}{h^2}\neq 0 \Rightarrow$$

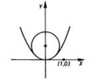
$$\Rightarrow \begin{cases} 2+b=0 \\ 1+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow b=-2; \quad c=1$$

La parábola pedida es $y=x^2-2x+1$.

Procedimiento segundo:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=g(1) \Rightarrow 1+b+c=0 \\ \left.\begin{array}{l} f'(x)=3(x-1)^2 \\ g'(x)=2x+b \end{array}\right\} f'(1)=g'(1) \Rightarrow 2+b=0 \end{array}\right\} b=-2; \quad c=1$$

9.2. *Dadas la parábola y circunferencia de la figura, $f(x)\equiv y=x^2$ y $g(x): x^2+y^2-y=0$, indíquese su orden de tangencia en $(0, 0)$.*



$$f(0)=g(0)$$

Parábola

$$y'=2x; \quad y'(0)=0$$
$$y''=2\ ; \quad y''(0)=2$$

Circunferencia

$$2x+2yy'-y'=0; \quad 2\cdot 0+2\cdot 0\cdot y'(0)-y'(0)=0 \Rightarrow y'(0)=0$$
$$2+2y'^2+y''\cdot 2y-y''=0; \quad 2+2\cdot 0+y''(0)\cdot 2\cdot 0-y''=0 \Rightarrow y''(0)=2$$

El orden de tangencia es 2. Se trata de la circunferencia osculatriz de la parábola en origen.

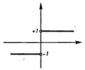
9.3. *Hállese el orden de aproximación de $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $g(x)=\cos x$, en un entorno de $x=\pi/4$.*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\pi/4+h)-\operatorname{sen}(\pi/4+h)}{h^n}\neq 0$$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-\sqrt{2}\ \operatorname{sen} h}{h^n}\neq 0$. Como $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}=1 \Rightarrow n=1$, el límite$\neq 0 \Rightarrow$ orden de aproximación$=0 \Rightarrow$ ambas curvas se cortan en $x=\pi/4$.

9.4. *Haciendo uso de la definición, derívese y dibújese la gráfica de la derivada de la función:* $f(x)=|x|$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}$$



Si $x>0$; $x+h>0 \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1$

Si $x=0$; $\nexists \lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}$, ya que:

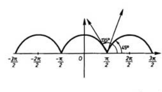
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{h\to 0_-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0_-}\frac{-h}{h}=-1\\ \lim_{h\to 0_+}\frac{|h|}{h}=\frac{h}{h}=1\end{array}\right\} \lim_{h\to 0_-}\frac{|h|}{h}\neq\lim_{h\to 0_+}\frac{|h|}{h}$$

Si $x<0$; $x+h<0 \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-x-h-(-x)}{h}=-1$

9.5. *Dibújese* $y=|\cos x|$ y calcúlense las ecuaciones de sus rectas tangentes en $x=\frac{\pi}{2}$

$$y'=\begin{cases}-\operatorname{sen} x, \text{ si } \cos x>0\\ \operatorname{sen} x, \text{ si } \cos x<0\end{cases}$$

En $\cos x=0$, que es nuestro caso, los resultados son los que aparecen al pie de la figura.



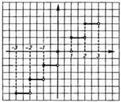
$$y'(\pi/2_+)=1=\operatorname{tg} 45° \quad\Rightarrow t_+=y-0=1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

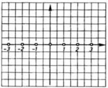
$$y'(\pi/2_-)=-1=\operatorname{tg} 135° \Rightarrow t_-=y-0=-1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Lo mismo se repite para $x=(2K+1)\pi/2 \quad K\in Z$.

9.6. *Estúdiese la derivabilidad de la función "parte entera de x".*

$f(x)=E(x)$ $\qquad\qquad$ $f'(x)=0,\ \forall x \in \mathfrak{R}-Z$

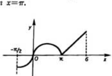




9.7. *Sea la función*

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \\ x-\pi & \text{si } \quad \pi \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

cuya gráfica es la que se dibuja. Estúdiese su continuidad y derivabilidad en $x=\pi$.



Continuidad

a) $f(\pi)=0$

b) $\lim\limits_{x \to \pi_-} f(x)=\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} \pi=0$

c) $\lim\limits_{x \to \pi_+} f(x)=\lim\limits_{x \to \pi} (x-\pi)=\pi-\pi=0$

De *b*) y *c*) se concluye que $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)=0 \Rightarrow f(x)$ continua en π.

Derivabilidad

d) $\lim\limits_{x \to \pi_-} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} \pi}{x-\pi} \stackrel{(1)}{=} D(\operatorname{sen} x)_{x=\pi}=(\cos x)_{x=\pi}=\cos \pi=-1$

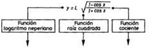
e) $\lim\limits_{x \to \pi_+} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x-\pi-(\pi-\pi)}{x-\pi}=1$

De *d*) y *e*) se concluye que al no ser iguales los límites por la izquierda y por la derecha, sus derivadas laterales no coinciden y, por tanto, la función no es derivable en $x=\pi$.

---

(1) Por definición.

9.8. *Derívese*



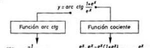
$$y' = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x) - (-\operatorname{sen} x)\,(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} x \cdot (1+\cos x+1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)\,(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x.$$

9.9. *Derívese:*



9.10. *Derívese, usando la derivación logarítmica:* $y = (\operatorname{sen} x)^{Lx}$

1.° Se toman logaritmos neperianos: $Ly = Lx \cdot L(\operatorname{sen} x)$

2.° Se aplica la derivada logarítmica: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x} \cdot L(\operatorname{sen} x) + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot Lx$

3.° Se despeja y': $y' = (\operatorname{sen} x)^{Lx} \cdot \left(\dfrac{L(\operatorname{sen} x)}{x} + \operatorname{ctg} x \cdot Lx\right)$

9.11. *Derívese, usando la derivada de la función inversa:* $y = \operatorname{arc\,sen} x$

$$x = \operatorname{sen} y$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

9.12. *Determínense las derivadas n-simas de las funciones*

a), $y = Lx$; b), $y = \operatorname{sen} x$

a) $y=Lx \Rightarrow y'=\dfrac{1}{x} \Rightarrow y''=-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow y'''=\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow y^{iv}=-\dfrac{2\cdot 3}{x^4} \Rightarrow y^{v}=\dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$

$$y^{(n}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$$

b) $y=\text{sen}\,x \Rightarrow y'=\cos x=\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

$$y''=-\text{sen}\,x=-[-\text{sen}\,(\pi+x)]=\text{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$y'''=-\cos x=-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\left[-\text{sen}\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)\right]$$

$$=\text{sen}\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$$

....

$$y^{(n}=\text{sen}\left(\frac{n\cdot\pi}{2}+x\right)$$

9.13. *Calcúlese la derivada n−sima de* $y=\dfrac{2x+1}{x^2-3x+2}$

Previamente conviene descomponer la función en suma de fracciones con denominadores lineales. Para ello se usa el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$

$$2x+1=A(x-1)+B(x-2);\ \text{para } x=1 \Rightarrow 3=-B \Rightarrow B=-3$$
$$\text{para } x=2 \Rightarrow 5=A$$

Entonces,

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x-2}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x-1}\right)$$

$$\frac{5}{x-2}\xrightarrow{D_1}\frac{-5}{(x-2)^2}\xrightarrow{D_2}\frac{2\cdot 5}{(x-2)^3}\xrightarrow{D_3}\frac{-3\cdot 2\cdot 5}{(x-2)^4}\cdots\xrightarrow{D_n}(-1)^n\cdot\frac{5\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}$$

Análogamente,

$$\frac{3}{x-1}\cdots\xrightarrow{D_n}(-1)^n\cdot\frac{3\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$$

Así pues,

$$y'=(-1)^n\cdot n!\left(\frac{5}{(x-2)^{n+1}}-\frac{3}{(x-1)^{n+1}}\right)$$

9.14. *Calcúlense los coeficientes de la ecuación diferencial $y''+ay'+by=0$, referible a la función $y=e^{-x}+2e^{-2x}$*

$$y'=-e^{-x}-4e^{-2x}$$
$$y''=e^{-x}+8e^{-2x}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada,

$$e^{-x}+8e^{-2x}+a(-e^{-x}-4e^{-2x})+b(e^{-x}+2e^{-2x})=0$$
$$e^{-x}(1-a+b)+e^{-2x}(8-4a+2b)=0$$

Identificando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{r}1-a+b=0\\ 8-4a+2b=0\end{array}\right\} \Rightarrow a=3; \quad b=2$$

9.15. *Derívese implícitamente la función $y\cdot x=x^2+y$. Luego, hállese $y'(3)$.*

Siendo, en este caso, fácil de despejar la y, aun cuando no se pide en el enunciado, haremos primero la derivada por el método "normal" y luego derivaremos implícitamente.

$$yx-y=x^2 \Rightarrow y=\frac{x^2}{x-1} \Rightarrow y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}; \quad y'(3)=\frac{3}{4}$$

Para derivar implícitamente no es necesario despejar previamente la y, sino que a ésta se la considera como lo que es, función de x. Así, la derivada, por ejemplo, de y^2 es $2y\cdot y'$. Hagámoslo en nuestro ejercicio:

$$y'\cdot x+1\cdot y=2x+y' \Rightarrow y'(x-1)=2x-y \Rightarrow y'=\frac{2x-y}{x-1}$$

En la función dada para $x=3$, corresponde $y=\frac{9}{2}$. para calcular $y'(3)$, sustituimos el par $(3, 9/2)$:

$$y'(3)=\frac{2\cdot 3-9/2}{3-1}=\frac{3}{4}$$

9.16. *Derívese implícitamente $x^3+y^3+2xy=0$.*

$$3x^2+3y^2y'+2y+2xy'=0 \Rightarrow y'(3y^2+2x)=-3x^2-2y \Rightarrow y'=-\frac{3x^2+2y}{3y^2+2x}$$

9.17. *Derívese:*

$$\left\{\begin{array}{l}x=a\cdot\cos t\\ y=a\cdot\operatorname{sen} t\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt}=-a\operatorname{sen} t\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=a\cos t\end{array}\right| \quad y'=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{a\cos t}{-a\operatorname{sen} t}=-\operatorname{ctg} t$$

9.18. *Derívese:*

$$\begin{cases} x=a(t-\text{sen}\, t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

$$y'=\frac{a\,\text{sen}\, t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\,\text{sen}^2\frac{t}{2}}=\text{ctg}\,\frac{t}{2}$$

9.19. *Hállese la derivada segunda de*

$$\begin{cases} x=a\cdot\cos t \\ y=b\cdot\text{sen}\, t \end{cases}$$

$$y'=\frac{b\cdot\cos t}{-a\cdot\text{sen}\, t}=-\frac{b}{a}\,\text{ctg}\, t$$

$$y''=\frac{-b\,\text{sen}\, t\cdot(-a\cdot\text{sen}\, t)-(-a\cdot\cos t)\,(b\cdot\cos t)}{(-a\cdot\text{sen}\, t)^3}=\frac{ab\cdot(\text{sen}^2 t+\cos^2 t)}{-a^3\cdot\text{sen}^3 t}=-\frac{b}{a^2\cdot\text{sen}^3 t}$$

9.20. *Calcúlese la diferencial de* $y=L\,\frac{1-x}{1+x}$

$$dy=y'dx$$

$$dy=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\,dx=-\frac{2}{1-x^2}\,dx$$

9.21. *Diferénciese:*

$$L\sqrt{x^2+y^2}=\text{arc tg}\,\frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2x\,dx+2y\,dy)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x\cdot dy-y\cdot dx}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2}\,(x\,dx+y\,dy)=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$$

$$dy(y-x)=dx(-x-y)$$

$$dy=\frac{x+y}{x-y}\,dx$$

9.22. *Un cuadrado tiene de lado dos metros. Determínese en cuánto aumenta el área del cuadrado cuando su lado lo hace en un milímetro. Calcúlese el error que se comete al usar diferenciales en lugar de incrementos.*

$$S=x^2;\quad \Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2=2{,}001^2-4=0{,}004001\ \text{m}^2$$
$$dS=2x\cdot dx=2\cdot 2\cdot 0{,}001=0{,}004\ \text{m}^2$$
$$\text{error}=\Delta S-dS=10^{-6}\ \text{m}^2$$

9.23. *Determínese el centro y radio de curvatura, en un punto $A(x, y)$, de una función f, dos veces diferenciable.*

La ecuación general de una circunferencia que pase por un punto (x, y) es

$$(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2=r^2 \qquad [1]$$

Por otra parte, para que sea osculatriz en (x, y) a la función f ha de cumplir $y'=f'$, $y''=f''$. Por derivación implícita dos veces se obtiene

$$2(x-\alpha)+2(y-\beta)y'=0$$
$$2+2(y')^2+2(y-\beta)y''=0$$

Al simplificar por dos y sustituir y', y'' por su valor, se tiene el sistema en α y β:

$$(x-\alpha)+(y-\beta)f'=0$$
$$1+(f')^2+(y-\beta)f''=0$$

del cual se deduce

$$\alpha=x-\frac{f'+(f')^3}{f''}$$
$$\beta=y+\frac{1+(f')^2}{f''}$$

y sustituyendo en la [1]:

$$r=\left|\frac{\sqrt{[1+(f')^2]^3}}{f''}\right|$$

9.24. *Evoluta de una curva es el lugar geométrico de sus centros de curvatura (α, β). Según esto, determínese la evoluta de la curva $f(x)=x^2+3$.*

Considerando en las fórmulas del centro de curvatura (problema anterior), las variables (α, β), vienen dadas en función de x, como parámetro. De modo que:

$$\begin{cases} \alpha=x-\dfrac{f'+(f')^3}{f''}=x-\dfrac{2x+8x^3}{2}=-4x^3 \Rightarrow x=\left(-\dfrac{\alpha}{4}\right)^{1/3} \\ \beta=y+\dfrac{1+(f')^2}{f''}=x^2+3+\dfrac{1+8x^2}{2} \end{cases}$$

$$\beta=\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^{2/3}+3+\frac{1+8\cdot(-\alpha/4)}{2}$$

$$\beta=\frac{7}{2}-\alpha+\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^{2/3}$$

9.25. *Calcúlense las ecuaciones de la tangente y la normal a la parábola $y=x^2-7x+12$, siendo la primera de esas rectas paralela a la bisectriz del primer cuadrante.*

Siendo T el punto de tangencia, en la parábola p, y v la bisectriz,

$$y'(T)=2x-7$$

$$\left.\begin{array}{l} m_t=m_v \Rightarrow 2x-7=1 \\ T\in p \Rightarrow x^2-7x+12=y \end{array}\right\} T(4,0)$$

$$t\equiv y-0=1\cdot(x-4);\ t\equiv y-x+4=0$$

$$n\equiv y-0=(-1/m_t)(x-4);\ n\equiv y+x+4=0$$

9.26. *Establézcanse en el punto $t=\pi/4$, las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva*

$$\left\{\begin{array}{l} x=t\cdot\cos t \\ y=t\cdot\operatorname{sen} t \end{array}\right.$$

$$x(\pi/4)=\sqrt{2}/2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{8};\quad y(\pi/4)=\sqrt{2}/2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

$$y'=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{\operatorname{sen} t+t\cdot\cos t}{\cos t-t\cdot\operatorname{sen} t};\quad y'(\pi/4)=\frac{4+\pi}{4-\pi}$$

$$t\equiv y-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}=\frac{4+\pi}{4-\pi}\left(x-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right);\quad n\equiv y-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}=-\frac{4-\pi}{4+\pi}\left(x-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$$

9.27. *Calcúlese el ángulo que forman las curvas $f(x)=\frac{x^2}{3}$ y $g(x)=\frac{4}{x^2+4}$, en su punto de corte de abscisa positiva.*

$$f(x)\cap g(x)=\{(\sqrt{2},2/3),\ (-\sqrt{2},2/3)\}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x \Rightarrow f'(\sqrt{2})=2\sqrt{2}/3=m_1=\operatorname{tg}\alpha$$

$$g'(x)=\frac{-8x}{(x^2+4)^2} \Rightarrow g'(\sqrt{2})=-2\sqrt{2}/9=m_2=\operatorname{tg}\beta$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{9}}{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{9}}=\operatorname{arc\,tg}\frac{24\sqrt{2}}{19}$$

9.28. *Determínese el ángulo que forma la tangente con el radio polar en $\omega=\frac{\pi}{6}$, de la lamniscata $\rho^2=a^2\cos 2\omega$*

$$\operatorname{tg}\psi=\rho\cdot\frac{d\omega}{d\rho}=\frac{\rho}{\rho'}=\frac{\sqrt{a^2\cos 2\omega}}{\frac{-a^2\cdot 2\cdot\operatorname{sen} 2\omega}{2\sqrt{a^2\cos 2\omega}}}=-\operatorname{ctg} 2\omega=-\sqrt{3}/3$$

$$\psi=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

9.29. *Dado el movimiento $s=t^3-2t^2$, calcúlese: a), la ecuación de su ve-*

locidad; b), la de su aceleración; c), averiguar en qué instantes se para el móvil; d), si va acelerando o frenando en el instante $t=4$ s.

a) $v=s'=3t^2-4t$

b) $a=v'=s''=6t-4$

c) $v=0 \Rightarrow 3t^2-4t=0 \Rightarrow t=0$ y $t=4/3$ s.

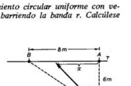
d) $a(4)=24-4=+20 \Rightarrow$ aceleración positiva

9.30. *Un depósito esférico, elástico, de diez metros de radio, lleno de helio, se vacía con un caudal de -1 m³/min. Calcúlese la velocidad de disminución de su superficie, en m²/min.*

$$\left.\begin{aligned} S=4\pi R^2 \Rightarrow dS=8\pi R\,dR \Rightarrow \frac{dS}{dt}=8\pi R\,\frac{dR}{dt} \\ V=\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow dV=4\pi R^2\,dR \Rightarrow \frac{dV}{dt}=4\pi R^2\,\frac{dR}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dS}{dt}:\frac{dV}{dt}=\frac{2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{2}{R}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{2}{10}\cdot(-1)=-0{,}2 \text{ m}^2/\text{min}.$$

9.31. *Desde O, una fuente láser, en movimiento circular uniforme con velocidad angular de $\pi/15$ rd/s., lanza una rayo, barriendo la banda r. Calcúlese la velocidad de barrido en A y en B.*



$$\varphi=\omega\cdot t \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{15}\cdot t;$$

$$\frac{x}{6}=\operatorname{tg}\varphi \Rightarrow x=6\cdot\operatorname{tg}\varphi \Rightarrow x=6\operatorname{tg}\frac{\pi}{15}\cdot t$$

$$dx=6\cdot\left(\sec^2\frac{\pi}{15}\cdot t\right)\cdot\frac{\pi}{15}\,dt;$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\pi}{5}\left(\sec^2\frac{\pi}{15}\cdot t\right)$$

En A, $x=0 \Rightarrow t=0$; $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{x=0}=\dfrac{2\pi}{5}$ m/s.

En B, $x=8 \Rightarrow -\dfrac{4}{3}=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{15}\cdot t \Rightarrow \sec^2\dfrac{\pi}{15}\cdot t=1+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{25}{9}$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=8}=\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{25}{9}=10\pi/9 \text{ m/s}.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

9.32. Hállese la parábola osculatriz, de las de eje paralelo al de ordenadas, de la función $y=x^4-2x^3+3x^2+4x-4$, en un entorno del punto $x=1$.

9.33. Justifíquese que el grado de aproximación de las funciones *seno* y *tangente*, en un entorno de $x=0$, es 2.

9.34. Haciendo uso de la definición, hállense las derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x)=E(x)=$"parte entera de x".

b) $g(x)=\dfrac{x}{|x|}$.

9.35. Establézcanse las derivadas, determinando los dominios y dibujando las gráficas, de las funciones:

a) $f(x)=|\operatorname{sen} x|$; *b)* $g(x)=|\operatorname{sen}^2 x|$. *c)* $h(x)=|\cos x|$

9.36. Estúdiese la continuidad y derivabilidad de la función que se establece, en $x=\dfrac{\pi}{2}$.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{si } -\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2\\ x-\pi/2, & \text{si } \pi/2\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$$

9.37. Calcúlense los límites laterales de la función que se indica, en el punto de abscisa nula y conclúyase si es o no derivable en ese punto:

$$f(x)=\begin{cases}e^x-1, & \text{si } x\in R^+\cup\{O\}\\ x^2, & \text{si } x\in R^-\end{cases}$$

9.38. Derívense:

a) $y=\sqrt{2x+1}$; *b)* $y=\dfrac{-1}{2x\cdot\sqrt{x}}$; *c)* $y=-\dfrac{1}{2}(x+2)^{-3/2}$

9.39. Derívense:

a) $y=\sqrt{2x}-2\sqrt{x}$; *b)* $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Derívense las siguientes funciones:

9.40. $y=L\dfrac{x+1}{x-1}$

9.41. $y=\sqrt{a+\sqrt{x}}$

9.42. $y=\operatorname{sen} 3x+\cos 2x$

9.43. $y=\operatorname{tg} x^2$

9.44. $y=\operatorname{ctg}(a-bx^2)$

9.45. $y=x^2\cdot\operatorname{sen}^3 x$

9.46. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{x}$

9.47. $y=x^2\cdot\operatorname{arc\,cos}\dfrac{2}{x}$

9.48. $y=L\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$

9.49. $y=e^{3x}$

9.50. $y=L\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}(x/2)}}$

9.51. $y=x^3\cdot 2^x$

9.52. $y=L\sqrt[3]{\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}}$

9.53. $y=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$

9.54. $y=\operatorname{arc\,sen} e^x$

9.55. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$

9.56. $y=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

9.57. $y=L[L(\sec x)]$

9.58. $y=(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

9.59. $y=(\operatorname{sen} x)^{e^x}$

9.60. $y=\operatorname{Th}(x^2+1)$

9.61. $y=x\cdot\operatorname{Sech} x^2$

9.62. $y=L(\operatorname{Th} 2x)$

9.63. $y=\dfrac{1}{2}L(\operatorname{Ctgh} 2x)$

9.64. $y=\operatorname{arg\,Th} x-\operatorname{arc\,tg} x$

9.65. $y=\operatorname{arc\,sen} x\cdot\operatorname{arg\,Sh} x$

9.66. $y=\dfrac{\operatorname{arg\,Ch} x}{x}$

9.67. $y=L(\operatorname{Sh} 2x)$

9.68. Calcúlese y'' dé $y=Lx\cdot e^{-x}$

9.69. Hállense y' e y'' de $y=L(\operatorname{tg} x+\sec x)$

9.70. Hállense y' e y'' de $\begin{cases} x=2-t \\ y=t^2+1 \end{cases}$

9.71. Calcúlense y' e y'' de $\begin{cases} x=2\operatorname{sen} t \\ y=\cos 2t \end{cases}$

9.72. Usando la derivada logarítmica, calcúlense las derivadas de:

a) $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\dfrac{1+x}{1-x^2}\cdot\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x$; *b)* $y=\left(1+\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^{\cos^2 x}$

9.73. Hállense las derivadas n-simas de:

a) $y=\cos x$; *b)* $y=2^x\cdot L2$; *c)* $y=\dfrac{1+x}{1-x}$; *d)* $y=L(1+x)$

9.74. Calcúlese la derivada n-sima de la función $y=\dfrac{x^2-x-12}{x^3-2x^2-5x+6}$.

9.75. Hállense los coeficientes de la ecuación diferencial $1+ay'^2=byy''$, referida a la función $y=\dfrac{1}{2}x^2+x+1$.

9.76. Justifíquese que la función $y=\dfrac{x^2}{2}\cdot e^x$, verifica la ecuación diferencial $y''-2y'+y=e^x$.

9.77. Calcúlese a y b en $ay''-by'+29y=0$, para que la ecuación diferencial sea verificada por la función $y=\operatorname{sen} 5x\cdot e^{2x}$.

9.78. Usando la derivación implícita, hállese la pendiente de la tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x+3y-15=0$, en el punto de abscisa 1 y ordenada positiva.

9.79. Derívese implícitamente:

a) $xy^2=x\cdot\operatorname{arc\,sen} y$; *b)* $(xy)^{\operatorname{sen} x}=y^x$

Derívense las siguientes funciones:

9.80. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1} \\ y=\dfrac{t^2}{(t+1)^2} \end{cases}$

9.81. $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

9.82. $\begin{cases} x=t^{1/2} \\ y=t^{1/3} \end{cases}$

9.83. $\begin{cases} x=m\cdot\cos^2 t \\ y=n\cdot\text{sen}^2\, t \end{cases}$

9.84. $\begin{cases} y=1/e^t \\ x=e^{2t} \end{cases}$

9.85. Hállese y'' de $\begin{cases} x=Lt \\ y=t^2 \end{cases}$

9.86. Calcúlese y'' de $\begin{cases} x=e^t\cdot\cos t \\ y=e^t\cdot\text{sen}\, t \end{cases}$

9.87. Establézcase la derivada segunda de $\begin{cases} x=\text{arc tg}\, t \\ y=1+t^2 \end{cases}$

9.88. Calcúlese $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1}$, en la función $y=\text{arc tg}\,\dfrac{2x+1}{2}$.

9.89. Diferénciese: $y=\dfrac{2x^2-1}{4}\cdot\text{arc sen}\, x+x\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}}$.

9.90. Calcúlese dy en $x^2-y^2-2xy=1$.

9.91. Justifíquese que $\forall x\in\mathbb{R}$, Δy de la función $y=2^x$, correspondiente a un Δx, equivale a $y\cdot\Delta x\cdot L2$, cuando $x\to 0$.

9.92. La extensión de un cultivo bacteriológico se puede considerar en su desarrollo como un triángulo equilátero, cuyo lado crece 1μ/día. Determínese la velocidad de crecimiento de su superficie, en el momento en que su lado es de 1,385 μ.

9.93. Siendo S=área del círculo, hállense ΔS, dS y el error que se comete al utilizar la segunda en lugar del primero, cuando el radio de una circunferencia de perímetro un cm, aumenta en 10^{-2} mm.

9.94. La ley que relaciona dos fenómenos es $y=x^3$. Calcúlese $\Delta y-dy$ en el punto 3, para los incrementos 0,1 y 0,01.

9.95. Calcúlese el error cometido al sustituir Δy por dy de la función $y=x^2-2x$, en el punto $x=2$, para los incrementos $\Delta x=0{,}1$; $\Delta x=0{,}001$.

9.96. Hállese la circunferencia osculatriz a la curva $y^2=12x$, en (3,6).

9.97. Determínese la circunferencia osculatriz de $x+y+2xy-4=0$, en $P(1, 1)$.

9.98. Establézcase la ecuación de la *evoluta* de la curva $y^2=8x$.

9.99. Calcúlense las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$, en $x=2$.

9.100. Determínense los puntos en los que la curva $y=2x^3+3x^2-36x+8$, presenta tangente paralela a la recta $y=6x+2$.

9.101. Dada la curva $xy=\dfrac{5}{2}$, determínense las ecuaciones de sus tangentes en T, sabiendo que $\overline{TO}=3$, siendo 0 el origen de coordenadas.

9.102. Calcúlense las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y=(3+x^2)^{-1}$, en $x=1$.

9.103. $P(2, 3) \in p$ y $Q(3, 13) \in p$, siendo $p=y=ax^2+bx+c$. En su punto de abscisa 1, su tangente es paralela a la bisectriz del primero y tercer cuadrantes. Determínense los valores de a, b y c.

9.104. Calcúlese el ángulo $\widehat{t_1Tt_2}$, siendo T un punto de $C=x^3+9x^2+50$; t_1 la tangente de la función en T; t_2 la tangente a la función en P, y $t_1 \cap C=\{T, P\}$.

9.105. Determínense los puntos en los que las tangentes a la curva $y=\dfrac{x}{1-x^2}$, tienen de inclinación $\pi/4$.

9.106. La parábola $p=y=-\dfrac{x^2}{4}-2x+12$ corta en A y en B a los ejes OX y OY, respectivamente. Hállense las ecuaciones de las tangentes a la curva en A y en B, así como el ángulo que forman.

9.107. Encuéntrese el punto de la curva $y=x^2-3x+5$, en el que la tangente forma un ángulo de 90° con la recta $x-2y+3=0$.

9.108. El punto T de ordenada 2, pertenece a la cicloide $\begin{cases} x=2(t-\operatorname{sen} t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$. Establézcase la ecuación de la tangente a la curva, en T.

9.109. Calcúlense las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva

$$\begin{cases} y=t^{-3}+t^{-2} \\ y=\dfrac{3}{2}t^{-2}+\dfrac{1}{2}t^{-1} \end{cases}$$

en el punto $T(2, 2)$.

9.110. Hállese la ecuación de la tangente a la curva $\begin{cases} x=t\cdot\cos t \\ y=t\cdot\operatorname{sen} t \end{cases}$, en $t=\pi/4$.

9.111. Justifíquese que las normales a la *envolvente* de la circunferencia

$$\begin{cases} x=\cos t+t\cdot\operatorname{sen} t \\ y=\operatorname{sen} t-t\cdot\cos t \end{cases},$$

son tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=1$.

9.112. Calcúlense los ángulos que forman las curvas $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ y $g(x)=\dfrac{8}{x^2+4}$, en sus puntos de corte.

9.113. Justifíquese que las hipérbolas $x^2-y^2=1$ y $x\cdot y=4$, se cortan ortogonalmente.

9.114. Determínese el ángulo que forman la tangente y el radio polar en el punto de contacto, en la lemniscata $\rho^2=4\cos 2\omega$.

9.115. Justifíquese que en el movimiento $s=a\cdot e^{kt}+b\cdot e^{-kt}$, se cumple que la aceleración es proporcional al espacio, en cada instante del movimiento.

9.116. Un móvil lo es según la ecuación $s=\dfrac{t^3}{3}-16t$. Hállese la aceleración en los puntos en que se para.

9.117. Un depósito cónico invertido es un refrigerador diferencial de aire líquido, dentro de un reactor industrial de síntesis. El aire líquido se inyecta por su parte superior a razón de 10 l/s. Calcúlese la velocidad de aumento de superficie de enfriamiento, en cm^2/s.

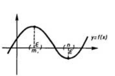
9.118. Un móvil tiene la trayectoria $xy=10$, de modo que su abscisa x aumenta uniformemente una unidad/s. ¿A qué velocidad varía la ordenada, cuando el móvil alcanza el punto de abscisa 5?

10

Funciones derivables. Gráficas. Optimización

Monotonía

Intervalo		*Monotonía*
$\forall x \in (-\infty, m)$,	$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$,	f es creciente $\Rightarrow f'(x) > 0$
$\forall x \in (m, n)$,	$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$,	f es decreciente $\Rightarrow f'(x) < 0$
$\forall x \in (n, +\infty)$,	$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$,	f es creciente $\Rightarrow f'(x) > 0$



Extremos locales

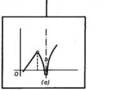
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} m \text{ es máximo local} \\ \text{de la función } f \end{array}\right\} \Leftrightarrow \exists A(m) / \forall x \in A(m), f(x) \leqslant f(m)}$$

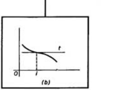
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} n \text{ es mínimo local} \\ \text{de la función } f \end{array}\right\} \Leftrightarrow \exists B(n) / \forall x \in B(n), f(x) \geqslant f(n)}$$

Los extremos locales (supuesta la función constante creciente-decreciente) separan intervalos de distinta monotonía;	Las tangentes a la función en los extremos locales son paralelas al eje de abscisas;

Pero

hay otros puntos que no son extremos locales, que también separan intervalos de distinta monotonía	hay otros puntos que no son extremos locales, que también tienen tangentes paralelas al eje de abscisas





Como condiciones suficientes para la existencia de máximo o mínimo local, puede escogerse una de estas tres:

> Para que una función derivable en a tenga un extremo local máximo o mínimo en ese punto a, es suficiente una de estas tres condiciones, supuesto $f'(a)=0$:
>
> 1. La curva queda al mismo lado de la tangente
>
> $$\forall x \in A(a),\ x \neq a, \begin{cases} f(x) \leqslant f(a) \Rightarrow \text{máximo} \\ f(x) \geqslant f(a) \Rightarrow \text{mínimo} \end{cases}$$
>
> 2. La función derivada cambia de signo en a
>
> $$h>0, \begin{cases} f'(x-h) \geqslant 0 \geqslant f'(x+h) \Rightarrow \text{máximo} \\ f'(x-h) \leqslant 0 \leqslant f'(x+h) \Rightarrow \text{mínimo} \end{cases}$$
>
> 3. La segunda derivada en a no es nula
>
> $$y''(a) \neq 0 \begin{cases} y''(a)<0 \Rightarrow \text{máximo} \\ y''(a)>0 \Rightarrow \text{mínimo} \end{cases}$$

Teorema de Rolle

> Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), tal que $f(a)=f(b)$, hay algún punto $c \in (a, b)$ en el que $f'(c)=0$.

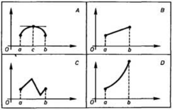
Sólo en A se cumple el teorema de Rolle.

En B no, porque $f(a) \neq f(b)$.

En C, f no es derivable en todo (a, b).

En D, f no es continua en $[a, b]$.

Interpretación gráfica: hay un punto en que la tangente es paralela al eje de abscisas.

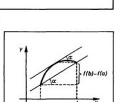


Teorema del valor medio

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación gráfica: hay un punto en el que la tangente es paralela a la secante.



Teorema de Cauchy

Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), existe un punto $c \in (a, b)$ en el que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teorema de la media generalizada

Sea $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable n veces en el intervalo semiabierto $[a, b)$ y tal que $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{n-1}(a) = 0$; en estas circunstancias existe un punto $\xi \in (a, b)$, tal que

$$\frac{f(b)}{(b-a)^n} = \frac{f^{(n}(\xi)}{n!}$$

Regla de L'Hôpital

Si $\lim_{x\to a} f(x)=0=\lim_{x\to a} g(x)$, en donde f y g son derivables en un entorno de a y existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, este límite coincide con $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Desarrollo de Taylor

El desarrollo de Taylor se puede escribir

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \xi\in(a,x)$$

$R_n(x)$ se llama resto del desarrollo de Taylor, y la expresión hallada de $R_n(x)$ se conoce como resto de Lagrange.

La expresión más general del resto conocida como resto de Schlömilch es

$$R_n(x)=\frac{f^{(n}(\xi)}{p(n-1)!}(x-a)^p(x-\xi)^{n-p},$$

donde p es un número natural arbitrario.

De esta expresión se obtiene el resto de Lagrange haciendo $p=n$. Si hacemos $p=1$, el resto que se obtiene es de Cauchy.

Serie de Taylor

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Esta suma infinita se llama *serie de Taylor* para distinguirla del desarrollo finito. No tiene significado en sí, sino como paso al límite cuando el número de sumandos crece,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n\right)=$$

$$=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Los puntos en los que es válida la representación en serie de Taylor (o sea, en los que el resto tiende a cero para $n\to\infty$), forman un intervalo de centro a que se llama *intervalo de convergencia*, que puede ser como caso particular cero o toda la recta.

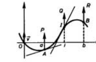
Desarrollo de Mac Laurin

En el caso particular de que $a=0$, el desarrollo de Taylor se llama de Mac Laurin.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Concavidad y convexidad. Inflexiones

La función es cóncava en A, porque en un cierto entorno de a la curva está en un mismo semiplano que $\overrightarrow{AP}\in \boldsymbol{v}$; de manera análoga, la función es convexa en B, porque en un cierto entorno de b la curva está en distinto semiplano que $\overrightarrow{BR}\in \boldsymbol{v}$.



Los puntos como el I, en los que la curva pasa de ser cóncava a convexa (o viceversa), la tangente atraviesa a la curva, y se llaman puntos de inflexión.

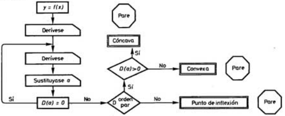
La función $y=f(x)$ indefinidamente derivable en a, es

$$\left.\begin{array}{l}\textit{cóncava} \text{ en } a\\ \\ \textit{convexa} \text{ en } a\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{la primera derivada que no se}\\ \text{anula, a partir de la de segundo}\\ \text{orden, es de orden } \textit{par}\end{array}\right\} \text{ y } \left\{\begin{array}{l}f^{(2k}(a)>0\\ \\ f^{(2k}(a)<0\end{array}\right.$$

La función $y=f(x)$, indefinidamente derivable en a, tiene un

$$\text{punto de } \textit{inflexión} \text{ en } a \Longleftrightarrow f''(a)=0 \wedge f^{(2k+1}(a)\neq 0 \left\{\begin{array}{l}\text{la primera derivada}\\ \text{que no se anula a}\\ \text{partir de la de se-}\\ \text{gundo orden es de}\\ \text{orden impar.}\end{array}\right.$$

El esquema para aplicar los criterios expuestos se expresa en el siguiente diagrama, que puede servir de guía para los siguientes ejercicios que se proponen:



Asíntotas

a) Paralelas a los ejes:

$$x=k,\ \text{siendo}\ \lim_{x\to k} y=\pm\infty$$

$$y=q,\ \text{siendo}\ \lim_{x\to\infty} y=q$$

b) Oblicuas:

$$y=mx+b \begin{cases} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-mx) \end{cases}$$

Método de regiones

Se trata de un método auxiliar para el dibujo de curvas.

1. Se descompone la función f dada en producto de funciones sencillas de dibujar. Así, de $y=f(x) \Rightarrow y\cdot g_1(x)\cdot g_2(x)=g_3(x)\cdot g_4(x)$.

2. Se dibujan cada una de las $g_i(x)$, con lo que el plano queda dividido en diferentes regiones, tales que en cada una de ellas dará un mismo signo para cada $g_i(x)$.

3. En cada una de esas regiones existirá o no la función $y=f(x)$, según que los dos miembros de la igualdad establecida en el punto primero, tengan signos iguales o no.

Han de tenerse en cuenta, además, los siguientes puntos:

a) Los puntos de intersección de cada función del primer miembro de la igualdad establecida en el punto primero, con cada una de las del segundo miembro, son de la curva, pues verifica su ecuación.

b) La curva $g_p(x)=x$, sí es región; pero no lo es el eje $OY\equiv x=0$, de no estar como factor en la descomposición efectuada.

c) Como al pasar de una a otra región contigua, una de las $g_i(x)$ cambia de signo, según el punto 3, las regiones posibles donde hay curva se suceden alternativamente, con tal de que $g_h(x)$ no sea una potencia par, pues entonces, no determina región.

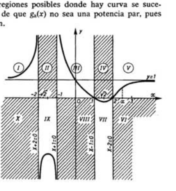
Ejemplo:

$$y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \Rightarrow$$

$$y\cdot(x+2)(x+1)=(x-1)(x-2)$$

Tomando un punto de la región III, por ejemplo el $(0, 3)$, investiguemos si en esa región hay función, viendo si se cumple que los dos miembros de la igualdad del punto 1 tienen el mismo signo:

y	$x+2$	$x+1$	?	$x-1$	$x-2$
+	+	+	SI	−	−
			+		



PROBLEMAS RESUELTOS

10.1. *Estúdiese y dibújese la gráfica de* $y=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$.

1.° *Ramas parabólicas:* Si $y=P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, siempre ocurre que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x)=\lim_{x\to\pm\infty} x^n\cdot\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right)=a_0\cdot(\pm\infty)^n;$$

dependiendo los signos de *los dos límites* del signo de a_0 y de la paridad de n. En nuestro caso: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$. La curva viene de $+\infty$ de las y, desapareciendo por $+\infty$ de las y.

2.° *Simetrías:* $\forall x\in \Re,\ f(x)\neq f(-x) \Rightarrow$ No es simétrica respecto de OY.
$f(x)\neq -f(-x) \Rightarrow$ No es simétrica respecto de O

3.° *Intersección con los ejes:*
Para $x=0$, $y=4$ $\quad (0,4)\in f$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 \\ 1 & & & & & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & & & & & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

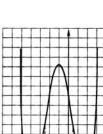
Para $y=0 \Rightarrow \begin{cases} (1,0)\in f \text{ (doble)} \\ (-2,0)\in f \text{ (doble)} \end{cases}$

$x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

4.° *Monotonía.* Extremos locales:

$y'=4x^3+6x^2-6x-4$
$y''=12x^2+12x-6$
$y'''=24x+12$
$y'=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2+-2;\ x_3=-1/2$
$y''(1)>0 \Rightarrow$ mínimo $(1,0)$
$y''(-2)>0 \Rightarrow$ mínimo $(-2,0)$
$y''(-1/2)<0 \Rightarrow$ máximo $(-1/2,\ 81/16)$

Intervalo	y'	*Monotonía*
$(-\infty, -2)$	$-$	decrece
$(-2, -1/2)$	$+$	crece
$(-1/2, 1)$	$-$	decrece
$(1, +\infty)$	$+$	crece



5.° *Concavidad y convexidad.* Inflexiones:

$y''=0 \Rightarrow x_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};\quad x_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

$y'''(x_1)\neq 0 \Rightarrow$ Inflexión $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};\ 2,23\right)$

$y'''(x_2)\neq 0 \Rightarrow$ Inflexión $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\ 2,23\right)$

Intervalo	y''	*Concavidad/convexidad*
$\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$	+	cóncava
$\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$	−	convexa
$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$	+	cóncava

10.2. *Estúdiese y dibújese la gráfica de la función* $y=\dfrac{-x^3}{(x-1)^2}$.

1.° El dominio de la función es $D=(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$ o bien, $R-\{1\}$.
2.° *Simetrías:*

$$\forall x \in D,\ f(x)\neq f(-x) \Rightarrow \text{No es simétrica respecto de } OY.$$
$$f(x)\neq -f(-x) \Rightarrow \text{No es simétrica respecto de } O.$$

3.° *Asíntotas:*

$$\lim_{x\to 1} y=-\infty \Rightarrow x=1;\quad \lim_{x\to\infty} y=-\infty \quad \text{No tiene } //OX$$

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=-1 \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-mx)=-2 \end{array}\right\}\ y=-x-2$$

Puntos de corte con las asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{-x^3}{(x-1)^2} \\ y=-x-2 \end{array}\right\}\ (2/3, -8/3)$$

4.° *Puntos de corte con los ejes:*

Unicamente $O(0, 0)\in f$.

5.° *Monotonía y extremos locales:*

$$y'=-\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3};\quad y''=\frac{-6x}{(x-1)^4};\quad y'''=\frac{18x+6}{(x-1)^5}$$

$$y'=0 \Rightarrow x_1=x_2=0;\quad x_3=3;\quad y''(0)=0;\quad y''(3)<0 \Rightarrow \text{máximo}\left(3, -\frac{27}{4}\right)$$

Intervalo	y'	*Monotonía*
$(-\infty, 1)$	−	Decrece
$(1, 3)$	+	Crece
$(3, +\infty)$	−	Decrece

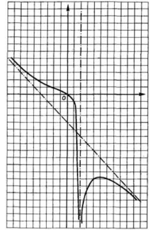
6.° *Concavidad y convexidad.* Inflexiones:

$y''=0 \Rightarrow x=0$;
$y'''(0)\neq 0 \Rightarrow$ Inflexión $(0, 0)$

Intervalo	y''	*Conc/Convex*
$(-\infty, 0)$	+	cóncava
$(0, 1)\cup(1, +\infty)$	−	convexa

7.° *Cuadro de valores*

x	y
-2	$8/9$
-1	$1/4$
0	0
2	-8
3	$-27/4$
4	$-64/9$



8.° Posición de la curva respecto de la asíntota

$$\left.\begin{array}{l} y_C=\dfrac{-x^3}{(x-1)^2} \\ y_A=-x-2 \end{array}\right\} \; y_C-y_A=\frac{-3x+2}{(x-1)^2} \; \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}(y_C-y_A)=+0 \Rightarrow y_C>y_A \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(y_C-y_A)=-0 \Rightarrow y_C<y_A \end{array}\right.$$

Un modo de sistematizar y registrar los cálculos, puede ser el cuadro siguiente:

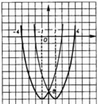
x	$-\infty$ ↗	0	$1-\varepsilon$	$x=1$	$1+\varepsilon$	3	$+\infty$ ↗	Corte asíntota en
y	$+\infty$ ↓ $+$	0	↓ $-$ $-\infty$	Asint.	↑ $-$ $-\infty$	$-\frac{27}{4}$	$-$ ↓	$(2/3\ ,\ -8/3)$
y'	$-$	0	$-$	Discontinua	$+$	0	$-$	
y''	$+$	0	$-$		$-$	$-$	$-$	
	Cóncava	Inflex.	Convexa		Convexa	Máx.	Convexa	

10.3. *Estúdiese y dibújese la gráfica de* $y=x^2-2|x|-8$.

Se descompone la función dada en las

$$\left.\begin{array}{l} y_1=x^2-2x-8 \\ y_2=x^2+2x-8 \end{array}\right\}$$

Como $-2|x|$ es siempre negativo, de la y_2 han de tomarse las $x<0$, y de la y_1, se usarán las $x \geqslant 0$, resultando la gráfica que en la figura aparece con trazo grueso:



10.4. *Estúdiese y dibújese la curva* $y=|3^x-3|$.

Considérese la $y_1=3^x-3$

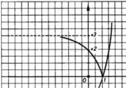
$y_1'>0$; $y_1''>0$; $y_1'''>0$, $\forall x \in R$

$(1, 0) \in y_1$; $(0, -2) \in y_1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y=-3$ es asíntota

$y_C-y_A=3^x>0 \Rightarrow$ curva por encima de la asíntota.

En $(-\infty, 1]$, $|3^x-3|$ es simétrica de 3^x-3, respecto de OX; en $[1, +\infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow y_1=y$. Tal situación es la que se aprovecha en la figura, para dibujar de trazo grueso la curva pedida.



10.5. *Aproxímese, mediante un polinomio de tercer grado, la función* $y=\operatorname{sen} x$.

$$y=\operatorname{sen} x \qquad y'=\cos x \qquad y''=-\operatorname{sen} x \qquad y'''=-\cos x \qquad y^{iv}=\operatorname{sen} x$$

$$\text{Para } x=0 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \\ f''(0)=0 \\ f'''(0)=-1 \\ f^{iv}(0)=0 \end{cases}$$

Usando el desarrollo de Mac Laurin,

$$\operatorname{sen} x=0+x-0\cdot x^2-\frac{1}{3!}x^3+0\cdot x^4+\ldots$$

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}, \quad \text{con error } e=\frac{x^4}{4!}\operatorname{sen}(\theta x)$$

10.6. *Calcúlese, usando la fórmula de Mac Laurin, sen 0, 3, y acótese el error que se comete al tomar los siete primeros términos del desarrollo.*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$$

$y=\operatorname{sen} x$	$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$
$y'=\cos x$	
$y''=-\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen} x=0+x-0-\frac{1}{3!}x^3+0+\frac{1}{5!}x^5-0-\frac{1}{7!}x^7+\frac{x^8}{8!}\operatorname{sen}(\theta x)$
$y'''=-\cos x$	
$y^{iv}=\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen} 0,3=0+0,3-0-0,0045+0+0,00002025-0-$
$y^{v}=\cos x$	$-0,000000043392857=0,295520206$
$y^{vi}=-\operatorname{sen} x$	El error es $\varepsilon=\frac{0,3^8}{8!}\operatorname{sen}(\theta x)$, y $\operatorname{sen}(\theta x)<1 \Rightarrow$
$y^{vii}=-\cos x$	
$y^{viii}=\operatorname{sen} x$	$\Rightarrow \varepsilon<\frac{0,3^8}{8!}=0,0000000016272321;\quad \varepsilon<1\cdot 10^{-8}$

Además, habiendo dado el resultado hasta la novena cifra decimal, ese número viene afectado por un error menor que 1×10^{-9}. Teniendo en cuenta ambos errores, $(1\times 10^{-8}+1\times 10^{-9}=1,1\times 10^{-8})$, la tangente de 0,3 ha sido calculada con un error de $\pm 1,1\times 10^{-8}$. Es decir:

$$0,295520195<\operatorname{tg} 0,3<0,295520217$$

10.7. *Los desarrollos en serie de Taylor y Mac Laurin son equivalentes a las funciones que desarrollan, sólo para los valores de x, para los que el resto de Lagrange cumple*

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x)=0$$

Teniendo en cuenta esto, determínese el intervalo para el que es válido el desarrollo en serie de Mac Laurin de la función $y=e^x$

$$y=e^x=y'=y''=\dots=y^{(n}$$

Siendo $\xi\in(0,x)$, el resto de Lagrange toma, en este caso, la forma

$$|R_n(x)|=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\xi}\right|=\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}\cdot e^{\xi}$$

Este resto aparece formado por el factor constante e^{ξ} y el factor variable, cuyo límite se analiza:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x\cdot x^n|}{(n+1)\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{|x^n|}{n!}=0\cdot 0=0,$$

ya que $\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0$ y la expresión que aparece en el segundo límite no es más que el término general de la serie *convergente* $1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots=e^x$.

Por tanto, se concluye:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \Rightarrow y=e^x \text{ se puede desarrollar } \forall x$$

10.8. *Determínese en qué intervalo la función $y=L(x+1)$ es desarrollable, según Mac Laurin.*

$$y'=\frac{1}{x+1};\quad y''=-\frac{1}{(x+1)^2};\quad y'''=\frac{2\cdot 1}{(x+1)^3};\quad y^{iv}=-\frac{3\cdot 2\cdot 1}{(x+1)^4};\quad \dots$$

$$y^{n}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n};\quad \xi\in(0,x)$$

El resto de Lagrange, en este caso, toma la forma

$$|R_n(x)|=\left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(\xi+1)^{n+1}}\right|=\frac{1}{(n+1)}\cdot\left(\frac{x}{\xi+1}\right)^{n+1}$$

Cuando $0<\xi<x\leqslant 1$, $0<x<\xi+1$ y $\dfrac{x}{1+\xi}<1$,

$$|R_n(x)|=\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{x}{\xi+1}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+1}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$$

Por tanto, $-1<x\leqslant+1$ es el intervalo pedido.

10.9. *Son formas indeterminadas* $\frac{0}{0}$; $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; 0^0; ∞^0; 1^∞. *En éste y en el ejercicio que sigue, se calculan límites en los que aparecen estas siete formas indeterminadas.*

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2}=0$

Se ha aplicado dos veces la regla de L'Hôpital.

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x}{x\cdot\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen}x+x\cdot\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x}{2\cdot\cos x-x\cdot\operatorname{sen}x}=0$$

Ante la indeterminación $\infty-\infty$, se ha operado pasando a la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital, se ha resuelto el límite.

c) La indeterminación $0\cdot\infty$, aparece en $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x-1)\cdot\sec 2x$. Operando se llega a la indeterminación 0/0, que se evita, aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x-1)\cdot\sec 2x=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\cos 2x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{1+\operatorname{tg}^2x}{-2\operatorname{sen}2x}=-1$$

10.10. *Calcúlense los siguientes límites:*

a) La fracción $\dfrac{a}{b}$ puede escribirse $\dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$, y es lo que se hace, para evitar las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$, como sucede en el siguiente ejercicio, que se completa, aplicando una vez la regla de L'Hôpital "sobre la indeterminación 0/0", que resulta.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} 2x} : \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 2$$

b) Cuando aparece la forma 0^0, el modo de actuar es el que se indica:

$$\lim_{x\to 0} (x^{\operatorname{tg} x}); \quad A = x^{\operatorname{tg} x} \Rightarrow LA = \operatorname{tg} x \cdot Lx \Leftrightarrow A = e^{\operatorname{tg} x \cdot Lx}$$

$$\lim_{x\to 0} (x^{\operatorname{tg} x}) = e^{\left(\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} x \cdot Lx)\right)}; \quad \lim_{x\to 0} (\operatorname{tg} x \cdot Lx) = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\operatorname{ctg} x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-\operatorname{cosec}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2 \operatorname{sen} x \cos x}{1} = \lim_{x\to 0} (-\operatorname{sen} 2x) = 0$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0} (x^{\operatorname{tg} x}) = e^0 = 1$$

c) De modo similar se actúa ante la indeterminación ∞^0.

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x}; \quad A = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x} \Rightarrow L\,A = \operatorname{sen} x \cdot L(\operatorname{ctg} x) \Leftrightarrow$$

$$A = e^{(\operatorname{sen} x \,\cdot\, L(\operatorname{ctg} x))}; \quad \lim_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x \,\cdot\, L(\operatorname{ctg} x))};$$

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x \cdot L(\operatorname{ctg} x)) = \lim_{x\to 0} \frac{L(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot (-\operatorname{cosec}^2 x)}{-\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0;$$

entonces,

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$$

d) En el $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/(x-2)}$ aparece la indeterminación 1^∞. Se actúa así:

$$A = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/(x-2)} \Rightarrow LA = \frac{1}{x-2} \cdot L\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x-2} L\left(\frac{x}{2}\right)} = A$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} \cdot L\frac{x}{2} = \lim_{x\to 2} \frac{L(x/2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{2}$$

Entonces, el límite pedido es $e^{1/2}$.

Nota. En el método de L'Hôpital conviene, antes de tomar nuevas derivadas en su aplicación reiterada, la supresión de factores comunes o la sustitución de infinitésimos por otros equivalentes, a fin de evitar la complicación de cálculo de derivadas, además de su acumulación.

10.11. *Calcúlese:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\dots\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3/6 - x^5/120+\dots}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{6}-\frac{x^3}{120}+\dots\right) = 0$$

10.12. *Hállese:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-L(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 - x^3/3 + x^4/4 - \dots}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\dots\right) = \frac{1}{2}$$

10.13. *Dadas las funciones* $f(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x-3}$ *y* $g(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x-5}$, *decídase si se puede aplicar el teorema de Rolle a cada una de ellas sobre el eje de abscisas.*

Para f(x)

$y=0 \Rightarrow x_1=2;\quad x_2=4$

En $x=3$ la función no existe.
$f(x)$ no es continua en $[2, 4]$.
NO se puede aplicar el teorema de Rolle.

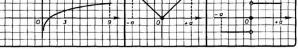
Para g(x)

$y=0 \Rightarrow x_1=2;\quad x_2=4$

En $x=5$ la función no existe.
$g(x)$ es continua en $[2, 4]$.
SI se puede aplicar el teorema de Rolle.

10.14. *Analícese si se cumple el teorema de la media en cada uno de los tres casos que se indican:*

$$f(x)=\begin{cases} 3, & \text{si } x<0 \\ L_3 x, & \text{si } 9<x\leqslant 9 \end{cases} \qquad g(x)=|x| \qquad h(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{si } x\neq 0 \\ 0, & \text{si } x=0 \end{cases}$$



$\dfrac{f(9)-f(-5)}{14}=f'(c)$

No existe c, porque la función no es continua en $[-5, 9]$, sino que existe en $[-5, 0) \cup (0, 9]$.

$\dfrac{f(a)-f(-a)}{2a}=f'(c)$

No existe $c \in [-a, a]$, porque la función no es derivable en todo $(-a, a)$, ya que $g'(0)$ no existe.

$\dfrac{f(a)-f(-a)}{2a}=f'(c)$

No existe $c \in [-a, a]$, porque la función no es continua en $x=0$.

10.15. *Hállese la altura y el radio de la base del cono de revolución de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de 9 cm de radio.*

Este tipo de problemas (aun cuando no sean "geométricos"), responden a un método general de resolución.

La función de la que se pide encontrar su máximo, es la función

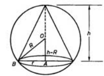
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad [1]$$

Tiene dos variables, r y h. Habrá de buscarse en el enunciado los datos que permitan encontrar una relación entre esas dos variables. En este caso, sobre la figura, en el triángulo OAB, se cumple que

$$r^2=R^2-(h-R)^2 \qquad [2]$$

La relación (2), puesto que R es dato, liga las variables r y h.

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene una función en una sola variable h:



$$V=\frac{\pi h}{3}(R^2-(h-R)^2)$$

Se opera:

$$V=\frac{\pi h}{3}(2Rh-h^2)=\frac{\pi}{3}(2Rh^2-h^3)$$

Para buscar el máximo de la función V, se deriva:

$$V'=\frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2)$$

Se iguala a cero:

$$V'=0 \Rightarrow \begin{cases} h=0 \\ h=\frac{4}{3}R=12 \text{ cm.} \end{cases}$$

$V''(0)>0 \Rightarrow$ mínimo; $\quad V''(12)<0 \Rightarrow$ máximo.

Las dimensiones del cono de volumen máximo son: $\begin{cases} h=12 \text{ cm} \\ r=6\sqrt{2} \text{ cm (calculado en (2))} \end{cases}$

10.16. *Se admite que el consumo de gasolina de un coche es proporcional al cuadrado de la velocidad. A 50 km/h, la gasolina gastada cuesta 120 ptas/h. Los restantes gastos de amortización y mantenimiento se estiman en 54 ptas/h. Hállese la velocidad a la que debe circular, si se pretende que el gasto por kilómetro sea mínimo.*

Velocidad pedida $=v$ km/h; gasto $=g$ ptas/km.

Valor de la gasolina gastada por hora $=k\cdot v^2$.

$$120=50^2\cdot k \Rightarrow k=\frac{6}{125}$$

$$g=\frac{6/125\cdot v^2+54}{v}=\frac{6}{125}v+\frac{54}{v}$$

$$g'=\frac{6}{125}-\frac{54}{v^2};\quad g'=0\Rightarrow v^2=1\,125\Rightarrow v=33{,}5\ \text{km/h}.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

10.17. Estúdiese y dibújese la gráfica de $y=x^4-2x^2$.

10.18. Analícese la monotonía de la función $y=L\dfrac{x+1}{x}$.

10.19. Discútase la monotonía de la función $y=\dfrac{x-k}{x+k}$ según los valores de k.

10.20. Hállense los máximos y mínimos de la función $y=(x+2)^2(x-1)^3$.

10.21. Estúdiese y dibújese la gráfica de la función $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

10.22. Represéntese la gráfica de la función $y=x\cdot(2+x^2)^{-1}$.

10.23. Estúdiese y constrúyase la curva de ecuación $y=\dfrac{x}{x^2-9}$.

10.24. Analícese y dibújese la gráfica de la función $y=\dfrac{4x-3}{x^2-4x+3}$.

10.25. Los puntos $M(-1, 1)$ y $N(2, -2)$ son máximo y mínimo, respectivamente, de la función $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hállense los valores de los coeficientes, el punto de inflexión de la curva y hágase su representación gráfica.

10.26. Hágase el estudio y gráfica de la función $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}$.

10.27. Determínese un $c\in[0, 2\sqrt{3}]$, para el que se cumpla el teorema de Rolle en la función $y=x^3-12x$.

10.28. Discútase la aplicación del teorema de Rolle, sobre el eje de abscisas, de las funciones $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$.

10.29. Justifíquese que existe un $c\in(0, x)$, para el que se cumple que

$$\frac{\operatorname{tg} x}{e^x-1}=\frac{\sec^2 c}{e^c}\qquad\text{en } (0, \pi/2).$$

10.30. Calcúlese un c que cumple el teorema del valor medio en $(3, 9)$, para la función $y=L_3x$.

10.31. Demuéstrese que existe y calcúlese $c\in(0, 1)$, para el que se cumple el teorema de Cauchy, para las funciones $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $g(x)=\cos x$.

10.32. Partiendo del teorema del valor medio, demuéstrese que para $x\in(-1, 0)\cup\cup(0, +\infty)$,

$$x>L(1+x)>\frac{x}{1+x}$$

10.33. Aplicando el teorema del valor medio, calcúlese aproximadamente $\sqrt[5]{33}$.

10.34. Una esmeralda que pesa m gramos y vale p soles colombianos se parte en dos trozos. Estimando que el valor de las esmeraldas son proporcionales al cubo de la raíz cuadrada de sus pesos, calcúlese:

a) depreciación de p en la fractura,
b) determínese la fractura menos deseable,
c) valor de la depreciación más alta en la fractura menos deseable.

10.35. El peso de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Justifíquese que cualquier partición de la piedra preciosa hace disminuir el valor. Luego, encuéntrese la partición menos deseable.

10.36. Determínense dos números naturales que suman 20, de modo que:
a) su producto sea el mayor posible,
b) sean catetos del triángulo rectángulo de hipotenusa mínima,
c) el cuadrado de su producto, multiplicado por uno de ellos sea máximo.

10.37. Determínense las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo, que esté inscrito en una esfera de radio $\sqrt{3}$ m.

10.38. Dos arcos consecutivos de una circunferencia de radio R, suman un cuadrante. Calcúlese la suma máxima de las cuerdas que substienden, así como el área del triángulo de mayor superficie, cuyos vértices son los extremos de las cuerdas.

10.39. Dada la parábola $y=x^2$, hállense los puntos de la curva que distan menos del punto $(0, 4)$.

10.40. Determínese el mayor valor de la altura de un trapecio de las siguientes características, con la condición que se indica:

$$AB \parallel DC; \quad \overline{AB} > \overline{DC}; \quad \hat{A}=90^\circ; \quad M \in \overline{AB}; \quad \text{condición: } \widehat{MDB} \text{ máximo;}$$
$$\overline{AB}=8 \text{ cm}; \quad \overline{DC}=2 \text{ cm}; \quad \overline{AM}=6 \text{ cm}.$$

10.41. Justifíquese que un recipiente cónico de capacidad fija tiene mínima superficie cuando su altura coincida con el diámetro de su "apertura".

10.42. Por cada operación inferior o igual a 100 000 ptas., una entidad bancaria carga el 0,5 por 100; en operaciones superiores, disminuye la tasa en un 0,4 por 1 000. Dígase el montante de la operación en la que el banco consigue mayor ganancia.

10.43. Una recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ gira alrededor del eje de ordenadas para conseguir un cono de volumen máximo, limitado por el plano del eje de abscisas, perpendicular a OY. Hállese la ecuación de esa recta.

Calcúlense los siguientes límites:

10.44.
$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$$

10.45.
$$\lim_{x\to\pi/2} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{tg} x$$

10.46.
$$\lim_{x\to 0} x^x$$

10.47.
$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{cosec} x - x^{-1})$$

10.48.
$$\lim_{x\to 0} (e^x-1)\cdot \operatorname{ctg} x$$

10.49.
$$\lim_{x\to +\infty} (Lx/x - x^{-1/2})$$

10.50.
$$\lim_{x\to 0} (e^x+3x)^{1/x}$$

10.51.
$$\lim_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}(\pi/2)x}$$

10.52.
$$\lim_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)^{\operatorname{tg} x}$$

10.53.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\operatorname{sen} x}$$

10.54.
$$\lim_{x\to 0} \frac{L\cos nx}{L\cos(n-1)x}$$

10.55.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x(1-\cos 3x)}$$

10.56.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{L(1+x)}$$

10.57.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-L(1+x)}{\cos\dfrac{x}{2}-1}$$

10.58.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\dfrac{2}{3}\operatorname{sen} x-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg} x}{x^5}$$

10.59. Estúdiese y dibújese la gráfica de la función
$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

10.60. Estúdiese y represéntese la curva de ecuación
$$y=\frac{5-4x}{x^2-1}$$

10.61. Analícese y dibújese la gráfica de la función
$$y=\frac{Lx}{x}$$

10.62. Estúdiese y dibújese "en su dominio" la gráfica de la función $y=x\cdot Lx$.

10.63. Analícese y represéntese la curva de ecuación
$$y=\frac{1}{2}L(x^2+2x-3)$$

10.64. Estúdiese la función $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$, analizando sus componentes *par* e *impar*, dibujando las gráficas de éstas y haciendo la representación conjunta.

10.65. Estúdiese y represéntese $y=|\operatorname{sen} x|+|\cos x|$. Se sugiere hacer el análisis en el intervalo $I=[0, 2\pi]$, dividiéndolo en cuatro partes.

10.66. Analícese y dibújese $y=(x-3)(|x+2|-1)$.

10.67. Hállense las dimensiones del rectángulo inscrito y centrado paralelamente a los ejes de la elipse $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, de área máxima.

10.68. Resuélvase el problema anterior con la condición de que sea máximo el perímetro del rectángulo.

10.69. Hállese un $c\in(0, 1)$ que cumpla el teorema de Cauchy para las funciones $f(x)=x^2-2x+3$ y $g(x)=x^2+4x+2$.

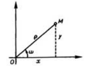
10.70. Los amperios que atraviesan una bobina de resistencia óhmica r ohmios, con una autoinducción de L henrios, al ser alimentada con e voltios, durante un tiempo t, vienen dados por la fórmula
$$I=\frac{e}{r}(1-e^{rt/L})$$

Consígase una fórmula más simple para el caso en que la resistencia óhmica sea despreciable.

11

Curvas y superficies

Coordenadas cartesianas y polares



$$x=\rho\cos\omega \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

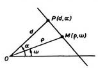
$$y=\rho\operatorname{sen}\omega \qquad \omega=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

Recta en polares

a) Pasa por el polo:

$$\omega=\omega_0=\text{cte.}$$

b) No pasa por el polo:



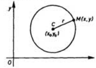
$$\rho=\frac{d}{\cos(\omega-\alpha)}$$

$$\frac{1}{\rho}=A\cos\omega+B\operatorname{sen}\omega$$

Circunferencia

Cartesianas

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2=0.$



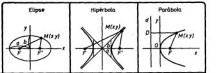
Polares

a) Centro = polo $\Rightarrow$ $\rho=r$
b) Centro en eje $\Rightarrow$ $\rho=2r\cos\omega$
c) Centro en ⊥ al eje en el polo $\Rightarrow$ $\rho=2r\operatorname{sen}\omega$
d) Caso general:

$$\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\omega-\omega_0)=r^2, \text{ con centro } (\rho_0, \omega_0)$$

Cónicas

Coordenadas cartesianas



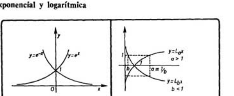
	Elipse	Hipérbola	Parábola
Ecuación	$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$	$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$	$\boxed{y^2=2px}$
parámetro = la ordenada de la x del foco, $=\frac{b^2}{a}$		$=\frac{b^2}{a}$	$=p$
Excentricidad	$\frac{c}{a}=e<1$	$\frac{c}{a}=e>1,$	$e=1$

Coordenadas polares

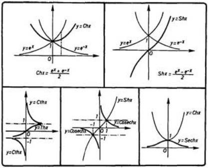
Se considera el caso en que el polo coincide con uno de los focos y el eje polar con el eje mayor. La ecuación para las tres cónicas es:

$$\rho=\frac{p}{1+e\cdot\cos\omega}; \quad \begin{array}{l} p=\text{parámetro} \\ e=\text{excentricidad.} \end{array}$$

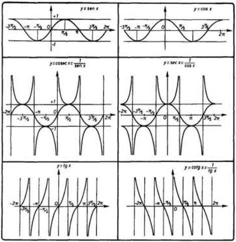
Curvas exponencial y logarítmica



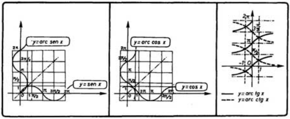
Curvas de las funciones hiperbólicas



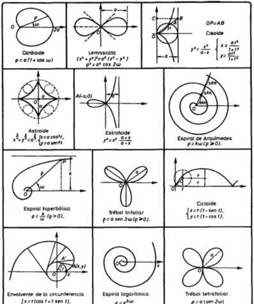
Curvas de las funciones circulares



Curvas de las funciones inversas de las circulares



Otras curvas



Gráficas de funciones y curvas. Clases

Curva es una aplicación continua de un segmento de recta en un plano.

Curva regular

Lo es $\begin{Bmatrix} x=f(t) \\ y=g(t) \end{Bmatrix}$ si $\exists f'(t)$ y $g'(t)$.

Curva regular a trozos, si existe $f'(t)$ y $g'(t)$, excepto en un número finito de puntos de $[t_1, t_2]$.

Arco de curva. Cada uno de los trozos de curva regular.

Curva simple, si la aplicación es inyectiva (no hay "bucles" o "dobles").

Curvas cerrada o no cerrada

Siendo M y N puntos inicia y final de la curva, si $M=N \Rightarrow$ *curva cerrada;* si $M \neq N \Rightarrow$ curva no cerrada.

En general, curva $\neq$ gráfica de una función.

Gráfica de una función continua=curva.

Gráfica de una función con discontinuidades aisladas=conjunto de curvas.

Curva=colección de funciones o función "multiforme", formada por funciones, cada una de cuyas gráficas se llama *rama.*

Curvatura. Centro y radio

Consúltense la página *150* y los problemas 9.23 y 11.4.

Evoluta de una curva dada es el lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva-dato.

Evolvente de una curva dada es la curva de la cual es evoluta la curva-dato.

Envolvente de una familia de curvas planas es la curva (o conjunto de curvas) tangente a todas las curvas de la familia-dato, de modo que cada punto de la envolvente, lo es de contacto con alguna de las curvas de la familia dada. Véase problema 11.7.

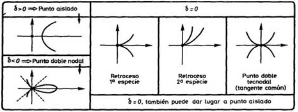
Puntos singulares

$$P(a, b) \text{ es punto singular de } f(x, y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(a, b)=0 \\ f'_x(a, b)=0 \\ f'_y(a, b)=0 \end{cases}$$

Si $P(a, b)$ es punto singular de $f(x, y)=0$, y las derivadas segundas en P,

$$p=f''_{xx}(a, b)$$
$$q=f''_{xy}(a, b)$$
$$r=f''_{yy}(a, b)$$

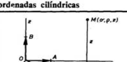
no son todas nulas, llamando $\delta=p\cdot r-q^2$, se clasifican los puntos singulares de la siguiente manera:



(Los dibujados se han localizado, por comodidad, en el origen.)

Superficies

Coordenadas cilíndricas



Las coordenadas cilíndricas de un punto M son (θ, ρ, z):

$\theta = \widehat{XOM_1}$; M_1 = proyección de M sobre el plano $x0y$

$\rho = |\overrightarrow{OM_1}|$, con unidad $|\overrightarrow{OA}|$

$z = \dfrac{\{\overrightarrow{M_1 M}\}}{\{\overrightarrow{OB}\}}$

Es habitual que $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}| = 1$.

Los campos de variabilidad de las coordenadas cilíndricas son:

$$0 \leqslant \theta < 2\pi$$
$$0 \leqslant \rho < +\infty$$
$$-\infty < z < +\infty$$

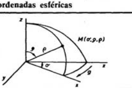
Por lo tanto existe una biyección entre los puntos del espacio y las ternas de puntos de la semibanda infinita.

$$[0, 2\pi) \times [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) = [0, 2\pi) \times \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}$$

Las fórmulas de paso de coordenadas cilíndricas a cartesianas y viceversa son:

$$\left\{\begin{array}{l} \theta = \operatorname{artg} \dfrac{y}{x} \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = z \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{array}\right\}$$

Coordenadas esféricas



Se fija un sentido de giro en el plano $x0y$, y una unidad de longitud. Las coordenadas esféricas de un punto M son (θ, φ, ρ).

$\theta = \widehat{x0x_1}$ $\quad 0 \leq \theta < 2\pi$

$\varphi = \widehat{z0M}$ $\quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

$\rho = |\overline{0M}|$ $\quad$ con la unidad fijada $0 \leq \rho < +\infty$

Esta referencia permite establecer una biyección entre los puntos del espacio y los del ortoedro finito

$$[0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, +\infty).$$

Las fórmulas de paso de coordenadas esféricas a cartesianas y viceversa son:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y=\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z=\rho \cos \varphi \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} \theta=\operatorname{artg} \dfrac{y}{x} \\ \varphi=\operatorname{artg} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{array}\right\}$$

Función real de dos variables reales

Se llama función real de dos variables reales a una aplicación de un subconjunto de $\mathcal{R}^2$ en $\mathcal{R}$.

$$\begin{array}{ccc} \underset{A \subset \mathcal{R}^2}{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{R} \\ (xy) & \longrightarrow & z=f(xy) \end{array}$$

El conjunto A es abierto o es un sobreconjunto de un abierto.

Entendemos por gráfica de la función anterior el conjunto de puntos de E_3 cuyas coordenadas cartesianas son $(x, y, f(xy))$ para $(x, y) \in A$.

Derivadas parciales. Derivadas según una dirección. Gradiente

Sea la función $f(xy)$ definida en las proximidades de (ab) y en el mismo punto (a, b).

1. Según la dirección del eje x

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial x}\right]_{(ab)}=\operatorname{tg} A_x$$

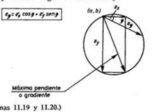
2. Según la dirección del eje y

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial y}\right]_{(ab)}=\operatorname{tg} A_y$$

(Véase el problema 11.18.)

3. Según una dirección cualquiera, determinada por el ángulo φ. $z_\varphi=\operatorname{tg} A_\varphi$ da la pendiente según la dirección φ.

$$\boxed{z_\varphi = z_x \cos\varphi + z_y \operatorname{sen}\varphi}$$



(Véanse los problemas 11.19 y 11.20.)

Superficies

Superficie es una *función vectorial tridimensional de dos variables reales.*
Una superficie es la imagen de una aplicación f de una región de E_2 en E_3.

$$\underset{R\subset E_2}{R} \xrightarrow{f} E_3$$
$$M=(u, v) \longrightarrow f(u, v)=(x(u, v), y(u, v), z(u, v))=(x, y, z)=M'$$

Las coordenadas (u, v) de M se llaman *coordenadas intrínsecas de* M'.
La expresión de una superficie

$$\left\{\begin{array}{l} x=x(u, v) \\ y=y(u, v) \\ z=z(u, v) \end{array}\right\}$$

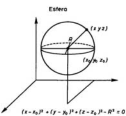
se conoce como *ecuaciones paramétricas.*

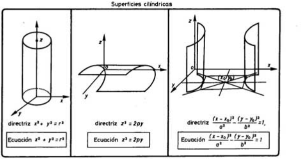
(Véanse los problemas 11.16 y 11.17.)

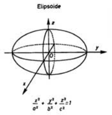
Algunas superficies elementales

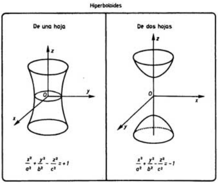
Plano

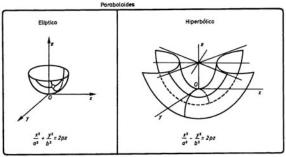
(Consúltese el tema 5.)











Plano tangente y recta normal a una superficie en $P(x_0, y_0, z_0)$

A) *Forma explícita*: $z=f(x, y)$. B) *Forma implícita*: $f(x, y, z)=0$.

Plano tangente

$$z-z_0=f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0) \qquad f'_x\cdot(x-x_0)+f'_y\cdot(y-y_0)+f'_z\cdot(z-z_0)=0$$

Recta normal

$$\frac{x-x_0}{f'_x}=\frac{y-y_0}{f'_y}=-(z-z_0) \qquad \frac{x-x_0}{f'_x}=\frac{y-y_0}{f'_y}=\frac{z-z_0}{f'_z}$$

Nota. Las derivadas parciales de *A)* se entienden particularizadas para (x_0, y_0); las que aparecen en *B)* significan la particularización para (x_0, y_0, z_0).

(Véase el problema 11.24.)

Curvas alabeadas

Curva alabeada es la aplicación de un segmento en E_3.

$$\underset{R\subset\mathcal{R}}{R} \xrightarrow{f} E_3$$
$$t \longrightarrow f(t)=(x(t), y(t), z(t))$$

Forma paramétrica *Forma implícita*

$$\begin{Bmatrix} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{Bmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} f(x\,y\,z)=0 \\ g(x\,y\,z)=0 \end{matrix}\right\}\text{Intersección de dos superficies.}$$

Recta tangente y plano normal a una curva en $P(x_0, y_0, z_0)$

A) *Forma paramétrica* B) *Forma implícita*

Recta tangente

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{dz}{dt}} \qquad \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} f'_z & f'_x \\ g'_z & g'_x \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}}$$

Plano normal

$$\frac{dx}{dt}\cdot(x-x_0)+\frac{dy}{dt}\cdot(y-y_0)+\frac{dz}{dt}\cdot(z-z_0)=0$$

$$\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} f'_z & f'_x \\ g'_z & g'_x \end{vmatrix}(y-y_0)+$$
$$+\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}(z-z_0)=0$$

Nota. Todas las derivadas parciales expresadas se entienden particularizadas para el punto *P*.

(Véase el problema 11.23.)

PROBLEMAS RESUELTOS

11.1. *Los puntos $F_1(3,2)$ y $F_2(13,2)$ son focos de una elipse de semieje mayor $a_1=13$; y también lo son de una hipérbola de semieje real $a_2=3$. Determínense las ecuaciones polares de ambas cónicas, especificando el polo y el eje polar a los que están referidas.*

Hipérbola

$2c_2=10 \Rightarrow c_2=5$
$5^2=3^2+b_2^2 \Rightarrow b_2=4$

parámetro$=b_2^2/a=16/3$; $e=\dfrac{5}{3}$

$$\rho=\frac{16/3}{1+\frac{5}{3}\cos\omega}=\frac{16}{3+5\cos\omega}$$

Elipse

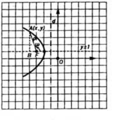
$2c_1=13-3=10 \Rightarrow c_1=5$
$13^2=b_1^2+25 \Rightarrow b_1=12$

parámetro$=b_1^2/a=144/13$; $e=\dfrac{5}{13}$

$$\rho=\frac{144/13}{1+\frac{5}{13}\cos\omega}=\frac{144}{13+\cos\omega}$$

Ambas con polo en $F_1(2,3)$ y eje polar $r\equiv y=2$.

11.2. *Dada la parábola $x=-\dfrac{1}{4}y^2+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{9}{4}$, caracterícese por sus elementos, dibújese y dése su ecuación en coordenadas polares.*



$y^2-2y+9=-4x$
$y^2-2y+9-8=-4x-8$
$(y-1)^2=-4x-8$
$(y-1)^2=-4(x+2)$

Vértice, $V(-2,1)$; $2p=4$; $p=2$; $\dfrac{p}{2}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ foco $F\left(-2-\dfrac{p}{2},\ 1\right)=(-3,1)$.

Directriz: $d\equiv x+1=0$.

La ecuación de la curva en polares es $\rho=\dfrac{2}{1+\cos\omega}$, referida al punto F, como polo y a la recta $y=1$, como eje polar.

11.3. *Resuélvase el problema inverso al planteado en el número anterior.*

Según la figura:

$$\rho=\sqrt{BF^2+BA^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$$

$$\omega=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{y-1}{x+3}\right) \Rightarrow \cos\omega=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2}}=\frac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}}$$

Sustituyendo en la ecuación polar las expresiones conseguidas para ρ y $\cos\omega$, resulta:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\frac{2}{1+\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}}$$

Operando y reduciendo términos semejantes, se consigue

$$x=-\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}y-\frac{9}{4}$$

que es la expresión cartesiana de la parábola, dada en el enunciado del problema anterior.

11.4. *Determínense curvatura, radio de curvatura y circunferencia osculatriz de la cicloide*

$$y=f(x)\begin{cases}x=t-\operatorname{sen} t\\ y=1-\cos t,\end{cases} \text{ en el máximo de su primer arco.}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t}=0 \Rightarrow \begin{cases}t=0\\ t=\pi\end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\operatorname{sen}^2 t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{1-\cos t}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=\pi}=-\frac{1}{4}<0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$K=\frac{\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}}{(4+0)^{3/2}}=-\frac{1}{4} \quad \text{con} \quad \begin{cases}x'=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_\pi=(1-\cos t)_\pi=2\\ y'=\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_\pi=(\operatorname{sen} t)_\pi=0\\ x''=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)_\pi=(\operatorname{sen} t)_\pi=0\\ y''=\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)_\pi=(\cos t)_\pi=-1\end{cases}$$

$$r=\frac{1}{|K|}=4$$

$$\text{Centro}:\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{f'+f'^3}{f''}=\pi-\dfrac{0+0^3}{-1/4}=\pi\\ \beta=y+\dfrac{1+f'^2}{f''}=2+\dfrac{1+0^2}{-1/4}=-2\end{cases} \quad \text{con} \quad f'=\left(\frac{dx}{dx}\right)_\pi \text{ y } f''=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_\pi$$

Circunferencia osculatriz: $(x-\pi)^2+(y+2)^2=16$.

11.5. *Encuéntrese el punto de mayor curvatura de la función logarítmica $y=Lx$.*

$$y'=\frac{1}{x};\quad y''=-\frac{1}{x^2};\quad K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{-1/x^2}{(1+1/x^2)^{3/2}}=\frac{-x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$\frac{dK}{dx}=\frac{2x^2-1}{(1+x^2)^{5/2}}=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\left(\frac{d^2K}{dx^2}\right)_{x=\sqrt{2}/2}<0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ es máximo de $K \Rightarrow$ mayor curvatura en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

11.6. *Calcúlese la ecuación de la evoluta de la curva $y=f(x)=-12x^2$.*

Sean (α, β) los centros de curvatura de f. Entonces:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=x-\frac{y'+y'^3}{y''}\\ \beta&=y+\frac{1+y'^2}{y''}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}y'&=-24x\\ y''&=-24\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\alpha&=x-\frac{-24x-13\,824x^3}{-24}=-576x^3\\ \beta&=-12x^2+\frac{1+576x^2}{-24}=12x^2-\frac{1}{24}\end{aligned}\right.$$

Así quedan las ecuaciones paramétricas de la evoluta, en función del parámetro x. Puede eliminarse entre ambas, resultando: $\alpha+48\beta+2=0$.

11.7. *Hállese la envolvente de la familia de rectas, establecida en función del parámetro α:*

$$F\equiv x\cdot\cos\alpha+y\,\text{sen}\,\alpha-d=0, \quad \textit{en la que} \quad d\in\mathfrak{R}^+$$

Se establece el sistema $\left\{\begin{aligned}F&=0\\ F'&=0\end{aligned}\right. \left\| \begin{aligned}&x\cdot\cos\alpha+y\cdot\text{sen}\,\alpha-d=0\\ &-x\cdot\text{sen}\,\alpha+y\cdot\cos\alpha=0\end{aligned}\right.$

Sólo queda resolver el sistema, despejando x e y, dando $\left\{\begin{aligned}x&=d\cdot\cos\alpha\\ y&=d\cdot\text{sen}\,\alpha\end{aligned}\right.$

Si se quiere poner la envolvente en forma implícita, se elimina el parámetro α:

$$\left\{\begin{aligned}x^2&=d^2\cdot\cos^2\alpha\\ y^2&=d^2\cdot\text{sen}^2\,\alpha\end{aligned}\right. \Rightarrow x^2+y^2=d^2$$

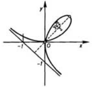
La curva conseguida, llamada *curva discriminante*, además de los puntos de la envolvente, puede contener otros puntos que no pertenezcan a ella.

11.8. *Demuéstrese que el origen es punto doble con tangentes distintas (nodal), de la curva $x^3+y^3-3xy=0$.*

$$\left.\begin{aligned}&f(0,0)=0\\ &f'_x(0,0)=(3x^2-3y)_{(0,0)}=0\\ &f'_y(0,0)=(3y^2-3x)_{(0,0)}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow 0(0,0) \text{ es punto singular}$$

$$\left.\begin{aligned}&p=f''(0,0)=(6x)_{(0,0)}=0_{xx}\\ &q=f''_{xy}(0,0)=\left[\frac{d}{dx}(f'_y)\right]_{(0,0)}=-3\\ &r=f''_{yy}(0,0)=(6y)_{(0,0)}=0\end{aligned}\right\} \delta=p\cdot r-q^2=-9<0 \Rightarrow 0(0,0) \text{ es punto doble nodal.}$$

Se trata de la curva que se dibuja:



11.9. *Justifíquese que la curva $y^2=x^3+kx^2$ tiene un punto doble nodal, si $k>0$; uno aislado, si $k<0$, y un punto de retroceso de primera especie, si $k=0$.*

$f\equiv x^3+kx^2-y^2=0$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=3x^2+2kx=0 \\ f'_y=-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 0(0,0) \\ A\left(-\dfrac{2k}{3},\ 0\right) \end{cases}$$

$0(0,0)\in f \Rightarrow$ punto singular; $A\notin f \Rightarrow$ no es punto singular.

$$\left.\begin{array}{l} p=f''_{xx}(0,0)=(6x+2k)_{(0,0)}=2k \\ q=f''_{xy}(0,0)=\left[\dfrac{d}{dx}(f'_y)\right]_{(0,0)}=0 \\ r=f''_{yy}(0,0)=-2 \end{array}\right\} \delta=2k\cdot(-2)-0=-4k$$

$k>0 \Rightarrow \delta<0 \Rightarrow 0(0,0)$ es punto doble nodal; $k<0 \Rightarrow d>0 \Rightarrow 0(0,0)$ es punto aislado.

$$k=0 \Rightarrow \delta=0;\quad y^2=x^3 \Rightarrow \pm\sqrt{x^3},\ x\in \mathfrak{R}^+\cup\{0\}.$$

La curva es simétrica respecto del eje de abscisas, al que es tangente $\Rightarrow 0(0,0)$, es punto de retroceso de primera especie.

11.10. *Determínense los puntos singulares de la curva $f\equiv x^3+x^3-6x^2=0$.*

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=3x^2-12x=0 \\ f'_y=3y^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0(0,0) \\ A(4,0) \end{array}\right.$$

$f(0,0)=0 \Rightarrow 0(0,0)$ es punto singular
$f(4,0)\neq 0 \Rightarrow A$ no es punto singular

$$\left.\begin{array}{l} p=f''_{xx}(0{,}0)=(6x-12)_{(0,0)}=-12 \\ q=f''_{xy}(0,0)=\left[\dfrac{d}{dx}(f'_y)\right]_{(0,0)}=0 \\ r=f''_{yy}(0,0)=(6y)_{(0,0)}=0 \end{array}\right\} \delta=-12\cdot 0-0^2=0$$

Como la función es continua en $0(0,0)$ y, además, para un $x\pm\epsilon$ del origen $\Rightarrow y>0 \Rightarrow$ punto de retroceso.

11.11. *Estúdiese y represéntese la curva* $(x^2+y^2)(x+3)=4$.

Puntos singulares

$$f=x^3+3x^2+xy^2+3y^2-4=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=3x^2+6x+y^2=0 \\ f'_y=2xy+6y=0 \end{array}\right\} y\cdot(x+3)=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-2 \end{cases}$$

$(0,0)\notin f$; $A(-2,0) \Rightarrow$ es punto singular.

$$\left.\begin{array}{l} p=f''_{xx}(A)=(6x+6)_A=-6 \\ q=f''_{xy}(A)=\left[\dfrac{d}{dy}(f'_x)\right]_A=(2y)_A=-4. \\ r=f''_{yy}(A)=(2x+6)_A=2 \end{array}\right\} \delta=(-6)\cdot 2-(-4)^2<0 \Rightarrow \text{es punto doble nodal.}$$

Simetría

$f(x,y)=f(x,(-y)) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del eje de abscisas.

Intersecciones con los ejes

$x=0 \Rightarrow 3y^2=4 \Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $\qquad y=0 \Rightarrow x^3+3x^2-4 \Rightarrow (-2,0)$ doble y $(1,0)$.

Dominio de variación

$$y=\pm\sqrt{\frac{4-x^3-3x^2}{x+3}} \Rightarrow \left.\begin{cases} x>-3 \\ 4-x^3-3x^2\geqslant 0 \Rightarrow x\leqslant 1 \end{cases}\right\} \text{Está definida en } (-3,1].$$

Extremos locales

Rama $y=+\sqrt{\dfrac{4-x^3-3x^2}{x+3}}$; $y'=0 \Rightarrow x_1=\sqrt{3}-2$; $y''(x_1)<0 \Rightarrow$ máximo

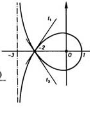
$$M(\sqrt{3}-2,\ \sqrt{3(2\sqrt{3}-3)})$$

Puesto que la curva es simétrica respecto del eje OX, tendrá un mínimo en

$$N(\sqrt{3}-2,\ -\sqrt{3(2\sqrt{3}-3)})$$

Asíntotas

$\lim\limits_{x\to-3} y=\infty \Rightarrow x=-3$



Tangentes en el punto doble nodal

$$y=+\sqrt{\frac{-(x-1)(x+2)^2}{x+3}}=+(x+2)\cdot\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$$

$$y'_+=+\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}+(x+2)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}\cdot\frac{-(x+3)-(1-x)}{(x+3)^2}$$

$y'_+(-2)=+\sqrt{3}$; $y'_-(-2)=-\sqrt{3}$

$t_1\equiv y=\sqrt{3}(x+2)$; $t_2\equiv y=-\sqrt{3}(x+2)$

11.12. *Las ecuaciones paramétricas del elipsoide son*

$$\left\{\begin{array}{l} x=a\cos u\operatorname{sen} v \\ y=b\cos u\cos v \\ z=c\operatorname{sen} u \end{array}\right.$$

Obténgase la ecuación implícita y también la explícita.

Eliminemos (u, v):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\cos^2 u\,(\operatorname{sen}^2 v+\cos^2 v)=\cos^2 u \\ \dfrac{z^2}{c^2}=\operatorname{sen}^2 u \end{array}\right\}$$

Sumando miembro a miembro

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \textit{ecuación implícita}$$

La ecuación explícita se obtiene despejando z

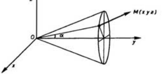
$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

11.13. *Hállese el radio y las coordenadas del centro de la esfera* $x^2+y^2+z^2-$ $-6x-8y+4z+20=0$

$$x_0=\frac{-6}{2}=-3, \quad y_0=\frac{+8}{2}=4, \quad z_0=\frac{-4}{2}=-2;$$

$$29-R^2=20; \quad R=\sqrt{9}-3.$$

11.14. *Determínese la ecuación del cono de revolución que tiene por eje el OX y como semiángulo cónico* α.



$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{y}$$

$$\boxed{x^2+z^2-y^2\operatorname{tg}^2\alpha=0}$$

11.15. *Determínese el cono de vértice el origen y directriz la hipérbola*

$$\left\{\begin{array}{r} y^2-z^2=1 \\ x=k \end{array}\right\}$$

Sea $P=(K, \sqrt{1+\beta^2}, \beta)$ un punto genérico de la hipérbola directriz.
Ecuación de OP

$$\frac{x}{K}=\frac{y}{\sqrt{1+\beta^2}}=\frac{z}{\beta}$$

$$\beta=\frac{Kz}{x}, \quad \frac{y}{\sqrt{1+\frac{K^2z^2}{x^2}}}=\frac{x}{K} \Rightarrow \boxed{x^2=K^2(y^2-z^2)}$$

11.16. *Analícese la aplicación de la región de E_2 en E_3 que tiene por imagen la superficie esférica. Represéntese la aplicación analizada.*

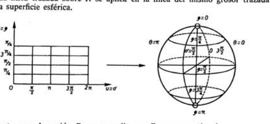
Supongamos una esfera de centro el origen y radio r. Si en las fórmulas de transformación de coordenadas esféricas a cartesianas se hace $\rho=r$, resultan:

$$\left\{\begin{array}{l} x=r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y=r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z=r \cos \varphi \end{array}\right\}$$

Si hacemos $u=\varphi$, $v=\theta$, estas fórmulas definen una aplicación de la región

$$[0, 2\pi)\times[0, \pi]=R \subset E_2 \text{ en } E_3$$

A continuación representamos gráficamente la aplicación. Téngase en cuenta que cada línea trazada sobre R se aplica en la línea del mismo grosor trazada sobre la superficie esférica.



En este caso, la región R que se aplica en E_2 es un rectángulo.

La aplicación es

$$M=(u, v) \longrightarrow M'=(r \operatorname{sen} v \cos u,\ r \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u,\ r \cos v)$$

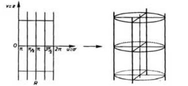
La imagen de la aplicación, o sea la superficie, es una esfera.

11.17. *Estúdiese y represéntese la aplicación de E_2 en E_3 que produce un cilindro de radio r y eje el OZ.*

En las fórmulas de paso de coordenadas cilíndricas a cartesianas hacemos $\rho=r$ y resulta

$$\left\{\begin{array}{l} x=r \cos \theta \\ y=r \operatorname{sen} \theta \\ z=z \end{array}\right\}$$

Si se hace $u=\theta$, $v=z$ se tendrá definida la transformación. Gráficamente se representa en la figura



En este caso, la región R es una banda infinita. La aplicación es

$$M(u, v) \longrightarrow M'(r \cos u,\ r \operatorname{sen} u, v)$$

La imagen de la aplicación es una superficie cilíndrica.

11.18. *Calcúlese la derivada de la función $z=x^2-3y^2$, en $A(2, 1)$, según la dirección de inclinación $\varphi=60°$.*

$$z'_x=2x;\quad (z'_x)_A=4;\quad z'_y=6y;\quad (z'_y)_A=6$$
$$z_\varphi=4\cdot\cos 60°+6\cdot\operatorname{sen} 60°=2+3\sqrt{3}$$

11.19. *Determínese la máxima pendiente o gradiente de la función $z=xy^2$, en $A(1, 1)$*

$$\left.\begin{array}{ll} z'_x=y^2; & (z'_x)_A=1 \\ z'_y=2xy; & (z'_y)_A=2 \end{array}\right\} \text{grad } z=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$$

11.20. *Determínese el módulo e inclinación del gradiente de la función $f=x^2+y^2+z^2=0$, en el punto $A(4, 4, -2)$.*

$$\left.\begin{array}{ll} f'_x=2x; & (f'_x)_A=8 \\ f'_y=2y; & (f'_y)_A=8 \\ f'_z=2z; & (f'_z)_A=-4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{grad } f=8\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k};\ \ |\text{grad } f|=\sqrt{8^2+8^2+(-4)^2}=12 \\ \cos\alpha=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3};\ \ \cos\beta=\dfrac{2}{3};\ \ \cos\gamma=-\dfrac{1}{3} \end{array}$$

11.21. *Díganse si en $A(1, 1, 1)$, las superficies f y g son o no tangentes:*

$$f=x^2+y^2+z^2-6x-6y+2z+7=0$$
$$g=x^2+2y^2-2z^2-1=0$$

Lo serán si f y g, en A, tienen el mismo plano tangente

$$\left.\begin{array}{ll} f'_x=2x-6; & (f'_x)_A=-4 \\ f'_y=2y-6; & (f'_y)_A=-4 \\ f'_z=2z+2; & (f'_z)_A=4 \end{array}\right\} -4(x-1)-4(y-1)+4(z-1)=0 \iff x+y-z-1=0$$

$$\left.\begin{array}{ll} g'_x=2x; & (g'_x)_A=2 \\ g'_y=4y; & (g'_y)_A=4 \\ g'_z=-4z; & (g'_z)_A=-4 \end{array}\right\} 2(x-1)+4(y-1)-4(z-1)=0 \iff x+2y-2z-1=0$$

En $A(1, 1, 1)$ las superficies f y g tienen distintos planos tangentes $\Rightarrow$ ellas no son tangentes.

11.22. *Justifíquese que las superficies* $f=z=\dfrac{xy}{4x-y}$ *y* $g=3z^2-5x+y=0$ *son ortogonales en el punto* $P(1, 2, 1)$.

Ha de demostrarse que las dos normales a ellas en P forman ángulo recto (también podría comprobarse viendo que sus planos tangentes son perpendiculares).

$$f=4xz-zy-xy=0$$

$$\left.\begin{array}{ll} f'_x=4z-y; & (f'_x)_A=2 \\ f'_y=-z-x; & (f'_y)_A=-2 \\ f'_z=4x-y; & (f'_z)_A=2 \end{array}\right\} \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{2}=n_1$$

$$\left.\begin{array}{ll} g'_x=-5; & (g'_x)_A=-5 \\ g'_y=1; & (g'_y)_A=1 \\ g'_z=6z; & (g'_z)_A=6 \end{array}\right\} \frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{6}=n_2$$

$$(2, -2, 2)\cdot(-5, 1, 6)=2\cdot(-5)+(-2)\cdot 1+2\cdot 6=0 \Rightarrow n_1 \perp n_2$$

11.23. *Hállense las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a la curva*

$$\left\{\begin{array}{l} x=t^2 \\ y=t^2-1 \\ z=t-2 \end{array}\right.$$

en el punto P, donde corta al plano x0y.

$$z=t-2=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow P(4, 3, 0)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_P=(2t)_2=4;\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_P=(2t)_2=4;\ \left(\frac{dz}{dt}\right)_P=1$$

$$t=\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{4}=z$$

$$N=4(x-4)+4(y-3)+z=0$$

11.24. *Dada la curva* $\begin{cases} f=x^2+y^2+z^2=3 \\ g=x+y+2z=5 \end{cases}$ *determínense las ecuaciones de su recta tangente y plano normal en el punto* $A(1, 0, 2)$.

$$\begin{array}{lll} f'_x=2x; & (f'_x)_A=2 & g'_x=1 \\ f'_y=2y; & (f'_y)_A=0 & g'_y=1 \\ f'_z=2z; & (f'_z)_A=4 & g'_z=2 \end{array}$$

$$t=\frac{x-1}{\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{z-2}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{2}=\begin{cases} x+2z=5 \\ y=0 \end{cases}$$

$$N=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot(x-1)+\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot y+\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot(z-2)=0=2x-z=0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

11.25. Hállense el centro y radio de la circunferencia $x^2+y^2+3x+5y-4=0$.

11.26. Determínese la ecuación de la circunferencia de centro $(3, \pi/2)$ y radio $r=2$.

11.27. Hállese la ecuación de la circunferencia de centro $(4, 0)$ y que pasa por el polo.

11.28. Calcúlese en coordenadas polares de polo en el origen y eje polar OX, la ecuación de la hipérbola $xy=8$.

11.29. Entendiendo por vértice de una curva el punto en que su curvatura presenta un máximo o un mínimo, determínese el vértice de la catenaria $y=2Ch\dfrac{x}{2}$.

11.30. Determínese el ángulo que forma el radio polar con la tangente a la cardioide $\rho=1+\cos t$, cuando $t=60°$.

11.31. Demuéstrese que la pendiente de la tangente a la curva $\rho=f(\omega)$, en $T(\rho, \omega)$, toma la forma

$$m_T=\frac{\rho\cos\omega+\rho'\operatorname{sen}\omega}{\rho'\cos\omega-\rho\operatorname{sen}\omega}$$

11.32. Demuéstrese que si el polo pertenece a $\rho=f(\omega)$ y $\exists\omega_1/f(\omega_1)=0$, la tangente a la curva en el polo tiene por pendiente $\operatorname{tg}\omega_1$.

11.33. Calcúlense las tres tangentes en el origen, a la curva $\rho=\cos 3\omega$.

11.34. El ángulo de corte en A, de dos curvas, expresadas en polares, se consigue mediante una fórmula análoga a la que lo da, en coordenadas cartesianas, sustituyendo las pendientes de las curvas en A, por las correspondientes tangentes de los ángulos que cada una de ellas presenta en A, entre su tangente y radio polar. Según esto, determínense los ángulos de intersección en los puntos de corte de las curvas $\rho=\sqrt{2}\operatorname{sen}\omega$ con $\rho^2=\cos 2\omega$.

11.35. Hállese la curvatura de $x^2+y^2=3-xy$, en $A(1, 1)$.

11.36. Calcúlese el radio de curvatura de $\begin{cases}x=t^2\\ y=t^3\end{cases}$ en $A(1, 1)$.

11.37. Determínese la curvatura de $\rho=(1-\cos\omega)^{-1}$, en $\omega_1=\pi/2$ y en $\omega_2=4\pi/3$.

11.38. Calcúlese la ecuación de la circunferencia osculatriz en $(0, 1)$ a la exponencial $y=e^x$.

11.39. Determínense las ecuaciones paramétricas de la evoluta de $\begin{cases}x=\cos\omega+\omega\operatorname{sen}\omega\\ y=\operatorname{sen}\omega-\omega\cos\omega\end{cases}$

11.40. Hállese la ecuación de la evoluta de $\begin{cases}x=2\cos t+\cos 2t\\ y=2\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 2t\end{cases}$

11.41. Justifíquese que la curva $\rho=e^{k\omega}$ y su evoluta son espirales logarítmicas homopolares.

11.42. Hállese la envolvente de la familia de circunferencias $2(x-k)^2+y^2-k^2=0$.

11.43. Determínese la envolvente de las rectas $F=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, tales que $a\cdot b=\text{cte}$.

11.44. En tiro se denomina *parábola de seguridad* a la envolvente de todas las trayectorias parabólicas del proyectil, disparado desde un emplazamiento, según distintos ángulos de tiro. Establézcase la parábola de seguridad del tiro

$$\begin{cases}x=v_0t\cdot\cos\alpha\\ y=v_0t\cdot\operatorname{sen}\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2.\end{cases}$$

[Hállese, primero, la ecuación de la trayectoria $y=f(x)$.]

11.45. Háganse el estudio y representación de las siguientes curvas:

a) $\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{1-x}{1+x}$; *b)* $x^4-y^2x^2+4=0$; *c)* $y^3-x^3=8x^2$; *d)* $y^2-x^3-9x+6x^2=0$.

11.46. Analícense y dibújense las curvas

a) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{1+t^2}; \\ y=\dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

11.47. Estúdiense y represéntense las curvas

a) $\rho=\dfrac{4}{\omega}$; b) $\rho=3 \operatorname{sen} 3\omega$; c) $\rho^2=2\cos 2\omega$.

11.48. Escríbase la ecuación de cilindros elípticos de generatrices paralelas al eje y, y cuya directriz sea una elipse contenida en el plano $x0y$ y de ejes paralelos a $0x$, $0z$.

11.49. Ecuación de la superficie cilíndrica engendrada por las rectas paralelas a la distancia 3 a la recta $x=y=z$.

11.50. Hállese la ecuación del cono de vértice $V=(1, 0, 0)$, y directriz

$$\begin{Bmatrix} x=0 \\ y^2+2z^2=1 \end{Bmatrix}$$

11.51. Dada la superficie $z=x^2-3y^2+7x+6$, exprésese en forma implícita y paramétrica.

11.52. Dada la superficie

$$\begin{cases} x=2u+3v \\ y=5u+\ v \\ z=\ u-\ u \end{cases}$$

exprésese en forma implícita.

11.53. Dada la función $z=x^2+3y$, hállese z'_{φ}, para $\varphi=\pi/3$.

11.54. Determínese la ecuación de la superficie cilíndrica de revolución, de eje paralelo a z, radio$=3$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

11.55. Calcúlese la ecuación del cono de revolución de semiángulo $\alpha=\pi/3$, de vértice el origen y de eje la recta $x=y=z$.

11.56. Dada la curva $x=3t$, $y=t^2-6$, $z=L(t-2)$, hállense sus ecuaciones cartesianas.

11.57. Se establecen las ecuaciones de la curva

$$\begin{gathered} 3x-3y+5z=0 \\ x^2-y^2+8z=0; \end{gathered}$$

exprésese en forma paramétrica.

11.58. Dada la elipse

$$\begin{cases} x=3\cos t \\ y=5 \operatorname{sen} t \\ z=0, \end{cases}$$

exprésese en forma paramétrica.

11.59. Exprésese la superficie $x^2-y^2+3x=0$ en coordenadas esféricas.

11.60. Exprésese la ecuación de una superficie cilíndrica en el sistema más adecuado, y lo mismo para una esfera.

11.61. Hállese el valor de la derivada, según $\varphi=120°$, de la función $z=y\cdot e^x$ en $A(0, 1)$.

11.62. Calcúlense el módulo y la dirección del gradiente de $f=x^2+xy+z=0$, en el punto $A(1, 1, -2)$.

11.63. Hállense las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a la curva

$$\left.\begin{aligned} x&=3t^2+1 \\ y&=t-2 \\ z&=2t^3 \end{aligned}\right\}$$ en el punto de corte con el plano $x0z$.

11.64. Determínense las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie que se dan, en los puntos que se indican:

a) $z-xy=0$, en $A(3, -1, -3)$.

b) $x^2+y^2+z^2=14$, en $A(1, 2, 3)$.

11.65. Determínese el lugar geométrico de los puntos que distan tres unidades de la recta $r\equiv x=y=z$.

12

Integrales indefinidas

Este tema pretende indicar la manera de hallar sistemáticamente las funciones primitivas de gran número de funciones. Pero debe tenerse en cuenta que, aunque toda función continua tiene primitiva, ésta no siempre puede expresarse mediante funciones elementales; tal es el caso, por ejemplo, de e^{-x^2}.

Integral indefinida de un diferencial dado es una función cuyo diferencial coincide con el dado. Así,

$$F(x) \xrightarrow{d} f(x)\,dx \xrightarrow{\int} F(x); \quad \text{es decir:} \quad (\int \circ d)\,[F(x)]=F(x)+C$$

El carácter lineal de la derivación pasa a la diferenciación, y se traduce en el de la integración:

$$\forall a, b \in R, \quad \int[a\cdot f(x)+b\cdot g(x)]\,dx=a\cdot \int f(x)\,dx+b\cdot \int g(x)\,dx,$$

ya que ambos miembros presentan la misma derivada.

Integrales inmediatas

$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C,\ (n \neq -1)$	$\int \operatorname{sen} f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\cos f(x)+C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=L\,\lvert f(x)\rvert+C\ (=Lk)=L\,\lvert k\,f(x)\rvert$	$\int \cos f(x)\cdot f'(x)\,dx=\operatorname{sen} f(x)+C$
$\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx=\frac{1}{La}\cdot a^{f(x)}+C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx=\operatorname{tg} f(x)+C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx=\operatorname{arc\,sen} f(x)+C$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx=\operatorname{arc\,tg} f(x)+C$
$\int Sh\,f(x)\cdot f'(x)\,dx=Ch\,f(x)+C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}\,dx=\arg\,Sh\,f(x)+C$
$\int Ch\,f(x)\cdot f'(x)\,dx=Sh\,f(x)+C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+1}}\,dx=\arg\,Ch\,f(x)+C$
$\int \frac{f'(x)}{Ch^2 f(x)}\,dx=Th\,f(x)+C$	$\int \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}\,dx=\arg\,Th\,f(x)+C$

Funciones hiperbólicas

Se definen:

$$Sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\quad Ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Rightarrow Ch\,x>0,\ \forall x;\quad Th\,x=\frac{Sh\,x}{Ch\,x}$$

Como consecuencias inmediatas de las definiciones, se recuerdan:

$$Ch\,x+Sh\,x=e^x;\quad Ch\,x-Sh\,x=e^{-x}$$

$$Ch\,(x+y)=\frac{1}{2}\left[e^{x+y}+e^{-(x+y)}\right]=\frac{1}{2}\left(e^x\cdot e^y+e^{-x}\cdot e^{-y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(Ch\,x+Sh\,x)(Ch\,y+Sh\,y)+(Ch\,x-Sh\,x)(Ch\,y-Sh\,y)\right]=$$

$$=Ch\,x\cdot Ch\,y+Sh\,x\cdot Sh\,y;$$ y, análogamente,

$$\left.\begin{array}{l}Sh\,(x\pm y)=Sh\,x\cdot Ch\,y\pm Ch\,x\cdot Sh\,y\\ Ch\,(x\pm y)=Ch\,x\cdot Ch\,y\pm Sh\,x\cdot Sh\,y\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}Ch\,2x=Ch^2x+Sh^2x\\ Sh\,2x=2\,Sh\,x\cdot Ch\,x\\ 1=Ch^2x-Sh^2x\end{array}\right.$$

$$Ch\,x=+\sqrt{Sh^2x+1};\quad Sh\,x=\pm\sqrt{Ch^2x-1}$$

Funciones inversas de las hiperbólicas

Siendo $y=Sh\,x\rightarrow x=\arg Sh\,y$, que se puede expresar como logaritmo neperiano:

$$y=Sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow e^x-e^{-x}-2y=0,\quad e^{2x}-2ye^x-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x=y\pm\sqrt{y^2+1};\ \text{pero } e^x>0,\ \forall x\in R\Rightarrow x=\arg Sh\,y=L(y+\sqrt{y^2+1})$$

Análogamente se deducen:

$$x=\arg Ch\,y=L(y\pm\sqrt{y^2-1});\quad x=\arg Th\,y=L\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

Derivadas de las funciones hiperbólicas

Es elemental comprobar los valores apuntados en la tabla de integrales inmediatas:

$$\frac{d}{dx}(Sh\,x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=Ch\,x$$

$$\frac{d}{dy}(\arg Ch\,y)=\frac{1}{\dfrac{d}{dx}(Ch\,x)}=\frac{1}{Sh\,x}=\frac{1}{\sqrt{Ch^2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}};\ \text{etc.}$$

Práctica de la integración inmediata

Un método seguro de preparar la integral inmediata propuesta es "buscar directamente el diferencial correspondiente", como se indica en el problema 12.1.

Con frecuencia, resulta muy cómodo "incluir dentro del signo diferencial" algún factor adecuado, con lo que se consigue la integración inmediata. Así se resuelven los problemas 12.3 al 12.6.

Formas

$$\boxed{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx; \quad \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx}$$

Como ax^2+bx+c se puede poner siempre en forma de suma de cuadrados, estos dos tipos se reducen a integrales inmediatas, de primitivas: las inversas de las trigonométricas o hiperbólicas. (Véanse los problemas 12.7 y 12.8.)

Forma

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx} \qquad P(x)\text{: polinomio de grado } n.$$

Se supone

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, con coeficientes indeterminados y $\lambda \in R$. Este y los coeficientes se hallan derivando la igualdad supuesta, con lo que, una vez conocidos, la integral toma un tipo analizado anteriormente. De esta manera se resuelve el problema 12.9.

Forma

$$\boxed{\int \frac{1}{(x-p)^n\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx; \quad (n \in N)}$$

Basta realizar el cambio $x-p=\dfrac{1}{t}$ para conseguir formas tratadas anteriormente. El problema 12.10 es ejemplo de ello.

Integración por partes

Siendo $u=f(x)$ y $v=g(x)$ se tiene:

$$d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv \implies u\cdot dv=d(u\cdot v)-v\cdot du$$

Entonces,

$$\boxed{\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du}$$

Con frecuencia, para reducir la integral dada a una inmediata hay que repetir el proceso varias veces.

Unas veces se obtiene una ecuación con la que se determina la integral buscada (problema 12.11); otras, al estar x^m multiplicando a funciones trascendentes (problema 12.12), son estas últimas las que han de tomarse dentro de la parte diferencial; si aparecen funciones logarítmicas no deben incluirse en la parte diferencial.

Funciones racionales

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx}$$

Sobre la expresión escrita supondremos siempre dos cosas: *a)* grado $P(x) <$ $<$ grado de $Q(x)$, ya que, en caso contrario, bastaría hacer la división entera de ambos polinomios y la integral se reduciría a la suma de una inmediata con otra que cumpliría la condición que se dice: *b)* ambos polinomios son primos entre sí, pues de no serlo, siempre es posible la simplificación por su m.c.d.

Así, pues, se puede descomponer el integrando en fracciones simples más una eventual parte entera, y la dificultad de la integración reside únicamente en el problema algebraico de hallar los ceros del denominador.

Consideramos dos casos:

1. El denominador tiene sólo ceros simples

Siendo $Q(x)$ polinomio de coeficientes reales, si hay una raíz imaginaria también existirá su conjugada, con lo que se pueden agrupar de dos en dos. Esto sugiere la descomposición:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_p}{x-a_p}+\frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\ldots+\frac{M_qx+N_q}{(x-\alpha_q)^2+\beta_q^2}$$

Por la linealidad de la integración este caso se reduce al cálculo de los siguientes tipos:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx=A\cdot L(x-a)+C\,(=Lk)=Lk(x-a)^A$$

Como

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{M(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{M\alpha+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

será:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx=M\int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx+(M\alpha+N)\int \frac{1/\beta^2}{\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}\,dx=$$

$$=\frac{M}{2}L[(x-\alpha)^2+\beta^2]+\frac{M\alpha+N}{\beta}\,\text{arc tg}\,\frac{x-\alpha}{\beta}+C$$

El problema ha quedado reducido, pues, al cálculo de las constantes A_i, M_j, N_j. Se realiza mediante el método de los coeficientes indeterminados, ya sea identificando coeficientes, ya sea dando valores convenientes a la indeterminada; o, lo que suele ser más cómodo, combinando ambos procedimientos, que es lo que se hace en el problema 12.13.

Si las raíces son solamente reales es muy preferible el método de las derivadas de Lagrange:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}; \qquad A_i=\frac{P(a_i)}{Q'(a_i)} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

Este es el método que se desarrolla en el problema 12.14.

2. El denominador tiene ceros múltiples

En este caso, y sobre todo si hay raíces imaginarias, el método anterior de los coeficientes indeterminados también resulta muy útil. Pero si sólo hay raíces reales es más cómodo actuar de la siguiente manera:

Si en el denominador $Q(x)$ hay un factor $(x-a)^h$, esta raíz a, de multiplicidad h, origina h fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^h\cdot q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_h}{(x-a)^h}+\frac{p(x)}{q(x)}$$

Multiplicando por $(x-a)^h$ y llamando $G(x)=\dfrac{P(x)}{q(x)}$, la descomposición

$$G(x)=A_1(x-a)^{h-1}+A_2(x-a)^{h-2}+\ldots+A_{h-1}(x-a)+A_h+(x-a)^h\cdot\frac{p(x)}{q(x)},$$

determina los coeficientes A_j, pues:

$$A_h=G(a); \quad A_{h-1}=G'(a); \quad A_{h-2}=\frac{G''(a)}{2!}; \ \ldots; \ A_{h-i}=\frac{G^{i)}(a)}{i!} \quad (i=0, 1, \ldots, h-1)$$

El método expuesto se utiliza en la resolución del problema 12.15.

Finalmente, si sólo aparecen raíces imaginarias múltiples, la integral se halla por el *método de reducción*, tal como se indica en el problema 12.16.

Funciones racionales. Método directo de Hermite-Ostrogradski

Es especialmente conveniente este método cuando los ceros del denominador son múltiples.

Se supone

$$\boxed{\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{X(x)}{D(x)}+\int\frac{Y(x)}{C(x)}dx}$$

donde,

$$D(x)=\text{m.c.d.}\ \{Q(x), Q'(x)\}; \quad C(x)=Q(x)/D(x); \quad X(x) \ \text{ e } \ Y(x)$$

son polinomios a determinar cuyos grados son una unidad menor que los de $D(x)$ y $C(x)$, respectivamente.

Con esto, el cálculo de la integral propuesta se reduce al de otra más sencilla, en la que los ceros son simples. Tal es el caso del problema 12.17.

Irracionales algebraicos

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int R\left\{x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/q_2}\ \dots\right\} dx \\ \text{donde } R \text{ indica función racional y } p_i,\ q_i \in Z\end{array}}$$

Estas integrales se reducen a casos anteriores mediante el cambio

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n, \text{ con } n=\text{m.c.m. } \{q_i\}$$

Así se hace en el problema 12.18.

Integración de funciones circulares e hiperbólicas

$$\boxed{\underset{(a)}{\int \cos^p x\, dx}; \quad \underset{(b)}{\int \operatorname{sen}^q x\, dx}; \quad \underset{(c)}{\int \operatorname{sen}^m \cos^n x\, dx}}$$

(a_1): $p=\text{par}=2k$:

$$\int \cos^p x\, dx = \int (\cos^2 x)^k\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k dx$$

Reiterando el proceso, se rebaja el grado del exponente. En el problema 12.20 se integra una función de la forma (b), de cálculo análogo al indicado para (a_1).

(a_2): $p=\text{impar}=2k+1$.

$$\int \cos^p x\, dx = \int (\cos^2 x)^k \cdot \cos x\, dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^k\, d(\operatorname{sen} x)$$

Se ha conseguido una integración inmediata. Véase el problema 12.19. La potencia impar de la forma (b) tiene análogo tratamiento.

La forma (c) se reduce sin dificultad a algunas de las anteriores, tal como muestran los problemas 12.21 y 12.22.

Productos lineales de senos y cosenos

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int \operatorname{sen} A \cdot \cos B\, dx; \quad \int \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B\, dx; \quad \int \cos A \cdot \cos B\, dx \\ \text{en las que } A=ax+b \text{ y } B=cx+d\end{array}}$$

Se reducen a inmediatas, aplicando las fórmulas de paso de sumas a productos en dichas funciones. Puede observarse el proceso en el problema 12.23.

Racionales de las funciones circulares

$$\boxed{\begin{array}{l}\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx \\ R \text{ indica función racional}\end{array}}$$

Se racionalizan mediante el cambio $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$, con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2+1}; \; dx = 2 \cos^2 \frac{x}{2}\, dt$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt; \; \cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Puede seguirse la aplicación de estos cálculos en el problema 12.24.
En el caso de que la función racional sea tal que

$$R(\operatorname{sen} x, \; \cos x) = R(-\operatorname{sen} x, \; -\cos x)$$

es preferible el cambio $\operatorname{tg} x = t$, como se comprueba en el problema 12.25.

PROBLEMAS RESUELTOS

12.1. $\displaystyle\int (3x^2 - 5\sqrt{x} + 3x^2 \cdot \operatorname{sen} x^3)\, dx = \int 3x^2\, dx - 5 \int x^{1/2}\, dx + \int 3x^2 \cdot \operatorname{sen} x^3\, dx =$

$\displaystyle = \int [x^3]'\, dx - 5 \int \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]' dx + \; [-\cos x^3]'\, dx =$

$\displaystyle = \int d(x^3) - 5 \int d\left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right) + \int d(-\cos x^3) =$

$\displaystyle = (x^3 + k_1) - \left(\frac{10}{3} x^{3/2} + k_2\right) + \left(-\cos x^3 + k_3\right) = x^3 - \frac{10}{3} \sqrt{x^3} - \cos x^3 + C$

12.2. $\displaystyle\int x \cdot \sqrt{5 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int (5 - x^2)^{1/2} \cdot (-2x)\, dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{3}{2} (5 - x^2)^{1/2} \cdot (-2x)\, dx =$

$\displaystyle = -\frac{1}{3} \int [(5 - x^2)^{3/2}]'\, dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(5 - x^2)^3} + C$

12.3. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx = \int e^{\operatorname{tg} x}\, d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C$

12.4. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -L \cos x + C = L \left| \frac{k}{\cos x} \right|$, con $C = Lk$

12.5. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{1+(x^3)^2} = \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\, x^3 + C$

12.6. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1+4^x}}\,dx = \int \frac{2^x}{\sqrt{1+(2^x)^2}}\,dx = \frac{1}{L2}\int \frac{2^x \cdot L2\,dx}{\sqrt{1+(2^x)^2}} =$

$= \frac{1}{L2}\arg Ch\, 2^x + C = \frac{1}{L2}\, Lk(2^x \pm \sqrt{4^x-1}).$

12.7. $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} = \int \frac{\frac{4}{3}\,dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right)^2+1} =$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{2/\sqrt{3}\,dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

12.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \int \frac{2/\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} =$

$= \arg Sh\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = Lk(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}),$ con $k = C/\sqrt{3}$

12.9. $\int \frac{3x^3-7x+2}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx = (mx^2+nx+p)\sqrt{x^2+2x-1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

Derivando,

$$\frac{3x^3-7x+2}{\sqrt{x^2+2x-1}} = (2m+n)\cdot\sqrt{x^2+2x-1} + (mx^2+nx+p)\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x-1}}$$

$$\Rightarrow\; 3x^3-7x+2 = (2m+n)(x^2+2x-1) + (mx^2+nx+p)(x+1) + \lambda;$$

de donde,

$$m=1;\quad n=-\frac{5}{2};\quad p=\frac{5}{2};\quad \lambda=2.$$

Luego,

$$\int \frac{3x^3-7x+2}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx = \left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2+2x-1} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-2}} =$$

$$= \left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2+2x-1} + 2\arg Ch\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2+2x-1} + LK(x+1\pm\sqrt{x^2+2x-1})^2$$

12.10. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\cdot\sqrt{x^2+4x-1}};\; x+2=\frac{1}{t};\; dx=\frac{-dt}{t^2};\; x^2+4x-1=(x+2)^2-5$

Sustituyendo,

$$I=\int \frac{-dt/t^2}{(1/t^2)\cdot\sqrt{1/t^2-5}}=\int \frac{-t\,dt}{\sqrt{1-5t^2}}=\frac{1}{5}\sqrt{1-5t^2}+C=\frac{\sqrt{x^2+4x-1}}{5(x+2)}+C$$

12.11. $I=\int e^x\cos x\,dx=\left\{\begin{matrix} e^x=u; & du=e^x\,dx \\ \cos x\,dx=dv; & v=\operatorname{sen} x\end{matrix}\right\}=+e^x\cdot\operatorname{sen} x-$

$$-\int e^x\cdot\operatorname{sen} x\,dx.$$

Pero $I_1=\int e^x\operatorname{sen} x\,dx=\left\{\begin{matrix} e^x=u; & du=e^x\,dx \\ \operatorname{sen} x\,dx=dv; & v=-\cos x\end{matrix}\right\}=-e^x\cdot\cos x+$

$$+\int e^x\cdot\cos x\,dx.$$

En definitiva, $I=e^x\operatorname{sen} x-(-e^x\cos x+I)=e^x\operatorname{sen} x+e^x\cos x-I.$

Luego,

$$I=\int e^x\cos x\,dx=\frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x+\cos x)+C$$

12.12. $I=\int x^3\cdot e^x\,dx=\left\{\begin{matrix} x^3=u; & du=3x^2\,dx \\ e^x\,dx=dv; & v=e^x\end{matrix}\right\}=x^3\cdot e^x-\underbrace{\int x^2\cdot e^x\,dx}_{=I_1}$

$$I_1=\left\{\begin{matrix} x^2=u; & du=2x\,dx \\ e^x\,dx=dv; & v=e^x\end{matrix}\right\}=x^2\cdot e^x-2\underbrace{\int x\cdot e^x\,dx}_{=I_2}$$

$$I_2=\left\{\begin{matrix} x=u; & du=dx \\ e^x\,dx=dv; & v=e^x\end{matrix}\right\}=x\ e^x-\int e^x\,dx=x\cdot e^x-e^x$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int x^3\cdot e^x\,dx&=x^3\cdot e^x-3I_1=x^3\cdot e^x-3(x^2\cdot e^x-2I_2)=\\&=x^3\cdot e^x-3x^2\cdot e^x+6(x\cdot e^x-e^x)+C=\\&=e^x\cdot(x^3-3x^2+6x-6)+C\end{aligned}$$

12.13. $I=\int \frac{2x^3+x-1}{x(x+1)(x-1)(x^2+4)}\,dx$

$$\frac{2x^3+x-1}{x(x-1)(x+1)(x^2+4)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+4};$$

de donde

$$\begin{aligned}2x^3+x-1&\equiv A_1(x^2-1)(x^2+4)+A_2(x+1)(x^2+4)x+\\&+A_3x(x-1)(x^2+4)+(Mx+N)x(x^2-1)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{coeficiente en } x^4 & 0=A_1+A_2+A_3+M \\ \text{para } x=0: & -1=-4A_1 \Rightarrow A_1=1/4 \\ \text{para } x=1: & 2=\ 10A_2 \Rightarrow A_2=1/5 \\ \text{para } x=2i: & -1-14i=20M-10Ni \Rightarrow M=-1/20;\ N=7/5\end{array}\right\}\Rightarrow A_3=-\frac{2}{5}$$

Entonces,

$$I=\frac{1}{4}\,Lx+\frac{1}{5}\,L(x-1)-\frac{2}{5}\,L(x+1)-\frac{1}{40}\,L(x^2+4)+\frac{7}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C$$

12.14. $\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2-2x}\,dx=I;\quad Q(x)=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$

$$Q'(x)=3x^2+2x-2;\quad P(x)=x^2+1$$

$$A_1=\frac{P(0)}{Q'(0)}=-\frac{1}{2};\quad A_2=\frac{P(1)}{Q'(1)}=\frac{2}{3};\quad A_3=\frac{P(-2)}{Q'(-2)}=\frac{5}{6};$$

luego:

$$I=-\frac{1}{2}Lx+\frac{2}{3}L(x-1)+\frac{5}{6}L(x+2)+C=Lk\sqrt{\frac{(x+2)^5\cdot(x-1)^4}{x^3}}$$

12.15. $I=\int \frac{3x^2+1}{(x+2)^3}\,dx;\ \frac{3x^2+1}{(x+2)^3}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{(x+2)^3};$

$3x^2+1=A_1(x+2)^2+A_2(x+2)+A_3$. Para $x=-2 \Rightarrow 13=A_3$

Derivando:

$$6x=2A_1(x+2)+A_2;\ \text{y si } x=-2 \Rightarrow -12=A_2$$

Volviendo a derivar:

$$6=2A_1 \Rightarrow 3=A_1$$

$$I=3\int\frac{dx}{x+2}-12\int\frac{dx}{(x+2)^2}+13\int\frac{dx}{(x+2)^3}=3L(x+2)+12\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}+C$$

12.16. $I=\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$

Como $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$, poniendo $x+2=z$, se tiene:

$$I=\int\frac{z-1}{(z^2+1)^2}\,dz=\int\frac{z}{(z^2+1)^2}\,dz-\int\frac{(1+z^2)-z^2}{(z^2+1)^2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2z}{(z^2+1)^2}\,dz-\int\frac{dz}{z^2+1}+\int\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz=$$

$$=-\frac{1}{2}(z^2+1)^{-1}-\text{arc tg}\,z+\frac{1}{2}\int z\cdot\frac{2z\,dz}{(z^2+1)^2}\left\{\begin{array}{l} u=z;\quad du=dz \\ \frac{2z\,dz}{(z^2+1)^2}=dv;\quad v=\frac{-1}{z^2+1}\end{array}\right\}$$

$$I=-\frac{1}{2}(z^2+1)^{-1}-\text{arc tg}\,z+\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,z-\frac{z}{2(z^2+1)}$$

Finalmente, basta hacer la restitución $z=x+2$.

12.17. $\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\int\frac{dx}{(x-1)^2\cdot(x^2+x+1)^2}$

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x^2+x+1)}+\int\frac{mx^2+nx+p}{x^3-1}\,dx$$

Derivando esta igualdad y quitando denominadores, al multiplicar por $(x^3-1)^2$ queda:

$$1=(2ax+b)(x^3-1)-3x^2(ax^2+bx+c)+(mx^2+nx+p)(x^3-1)$$

Identificando coeficientes,

$$a=0;\quad b=-1/3;\quad c=m=n=0;\quad p=-2/3$$

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x^3-1}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3-1}$$

Pero en esta última integral, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$; que, según casos anteriores, resulta:

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\int\frac{1/3}{x-1}dx-\int\frac{1/3\cdot x+2/3}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=\frac{1}{3}L(x-1)-\frac{1}{6}L(x^2+x+1)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

En definitiva,

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{x}{x^3-1}+\frac{1}{9}L\,\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

12.18. $I=\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}\,dx;$ Cambio: $x+1=t^6,\ dx=6t^5\,dt$

$$I=\int\frac{t^3+2}{t^4-t^3}\cdot 6t^5\,dt=6\int\frac{t^5+2t^2}{t-1}dt=6\int\left(t^4+t^3+t^2+3t+\frac{3}{t-1}\right)dt=$$

$$=\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+9t^2+18L(t-1)+C.$$

Finalmente, basta deshacer el cambio $t=\sqrt[6]{x+1}$.

12.19. $$\int\cos^7 x\,dx=\int\cos^6 x\cdot\cos x\,dx=\int(1-\operatorname{sen}^2 x)^3\cos x\,dx=$$

$$=\int d(\operatorname{sen}x)-3\int\operatorname{sen}^2 x\,d(\operatorname{sen}x)+3\int\operatorname{sen}^4 x\,d(\operatorname{sen}x)-$$

$$-\int\operatorname{sen}^6 x\,d(\operatorname{sen}x)=\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}^3 x+\frac{3}{5}\operatorname{sen}^5 x-\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x+C.$$

12.20. $$\int\operatorname{sen}^4 x\,dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x\,dx=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\,2x+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen}4x+C.$$

12.21. $$\int\operatorname{sen}^5 x\cdot\cos^2 x\,dx=\int\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}^4 x\cdot\cos^2 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^2\cdot\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}x\,dx=$$

$$=\int\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}x\,dx-2\int\cos^4 x\cdot\operatorname{sen}x\,dx+\int\cos^6 x\cdot\operatorname{sen}x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{1}{7}\cos^7 x+C.$$

12.22. $$\int\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\cdot\cos^2 x\,dx=\int\cos^2 x\,dx-$$

$$-\int\cos^4 x\,dx=\frac{1}{8}\,x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{32}\operatorname{sen}4x+C.$$

(Se ha aplicado la técnica del problema 12.20.)

12.23. $\int \operatorname{sen} 3x \cdot \cos(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen} \frac{5x+1}{2}\,dx + \int \operatorname{sen} \frac{x-1}{2}\,dx\right] =$

$= -\frac{1}{5}\cos\frac{5x+1}{2} - \cos\frac{x-1}{2} + C.$

12.24. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = I.$

Los cambios a realizar para calcular esta integral se encuentran expuestos en la primera parte del tema, inmediatamente antes del problema 12.1. Con ellos, el cálculo es el siguiente:

$$I = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{1+2t-t^2} = \int \frac{2\,dt}{2-(t-1)^2} =$$

$$= \sqrt{2}\operatorname{arg} Th\,\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C = \sqrt{2} L \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 1}{\sqrt{2} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 1}} + C$$

12.25. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = I;$ cambio: $\operatorname{tg} x = t$

$$I = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1}{(1+t^2)^2}} = \int (1+t^2)\,dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

12.26. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \operatorname{sen} t \\ dx = \cos t\,dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{\operatorname{sen}^4 t}{\cos^3 t}\,dt = \int \frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t}\,dt =$

$= \int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt - 2\int dt + \int \cos^2 t\,dt = \operatorname{tg} t - 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + C.$

No queda más que restituir la variable x mediante $t = \operatorname{arc\,sen} x$.

12.27. $\int \sqrt{4-2x-x^2\,dx}$

Bastaría multiplicar y dividir el integrando por sí mismo para conseguir una integral de tipo conocido. Pero también se puede hacer, completando la suma de cuadrados:

$$\int \sqrt{4-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{5-(x+1)^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x+1 = \sqrt{5}\operatorname{sen} t \\ dx = \sqrt{5}\cos t\,dt \end{matrix}\right\} =$$

$$= 5\int \cos^2 t\,dt = \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}\operatorname{sen} 2t + C.$$

El cambio se deshace con $t = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x+1}{\sqrt{5}}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

12.28. $\int (1+x)\sqrt{x}\,dx$

12.29. $\int \frac{x^2-5x+4}{x^2}\,dx$

12.30. $\int (x^3-1)\cdot 3x^2\,dx$

12.31. $\int \sqrt{x^3-1}\cdot x^2\,dx$

12.32. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

12.33. $\int \frac{x\,dx}{a+bx}$

12.34. $\int \frac{2x+3}{3x+4}\,dx$

12.35. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$

12.36. $\int \frac{x^4-x^2-1}{x+1}\,dx$

12.37. $\int \frac{dx}{x}$

12.38. $\int \frac{dx}{ax+b}$

12.39. $\int \frac{x^2\,dx}{1+2x^3}$

12.40. $\int (e^x-2)\,dx$

12.41. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

12.42. $\int \operatorname{sen}(2x+3)\,dx$

12.43. $\int (\cos 3x+\operatorname{sen} 3x)^2\,dx$

12.44. $\int \frac{1}{x}\cdot\operatorname{sen}(Lx)\,dx$

12.45. $\int \sec^2(x+2)\,dx$

12.46. $\int \operatorname{ctg}^2 kx\,dx$

12.47. $\int (\sec 2x+\operatorname{tg} 2x)^2\,dx$

12.48. $\int (\sec x+1)^2\,dx$

12.49. $\int \frac{dt}{\operatorname{cosec} 2t-\operatorname{ctg} 2t}$

12.50. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}\,dx$

12.51. $\int \frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

12.52. $\int \frac{1+\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 2x}\,dx$

12.53. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$

12.54. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}\,dx$

12.55. $\int \cos\frac{x}{3}\operatorname{sen}\frac{x}{3}\,dx$

12.56. $\int \frac{ax-b}{x^2+x}\,dx$

12.57. $\int \sqrt{m-nx}\,dx$

12.58. $\int \frac{dx}{\sqrt{10+8x-x^2}}$

12.59. $\int x\cdot\operatorname{ctg}(x^2+1)\,dx$

12.60. $\int Sh^2 x\,dx$

12.61. $\int \frac{dx}{Ch\,x}$

12.62. $\int \frac{dx}{Sh\,x}$

12.63. $\int Th\,x\,dx$

12.64. $\int \frac{dx}{Sh\,x\cdot Ch\,x}$

12.65. $\int \frac{dx}{1-x^2}$

12.66. $\int \frac{dx}{x^2-9}$

12.67. $\int (4x^2-9)^{1/2}\,dx$

12.68. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

12.69. $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$

12.70. $\int Cth\,x\,dx$

12.71. $\int x\cdot e^{-x^2}\,dx$

12.72. $\int Lx\,dx$

12.73. $\int x\cdot \text{sen}\, x\,dx$

12.74. $\int \text{arc sen}\, x\,dx$

12.75. $\int x\cdot e^x\,dx$

12.76. $\int \frac{x}{2^x}\,dx$

12.77. $\int \frac{Lx}{x^{1/2}}\,dx$

12.78. $\int x\cdot\sqrt{x+1}\,dx$

12.79. $\int e^{2x}\cdot \text{sen}\, 3x\,dx$

12.80. $\int a^x \cos x\,dx$

12.81. $\int x^2\, Lx\,dx$

12.82. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}\ (x=2\,\text{tg}\, t)$

12.83. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-3}}\,dx;\ (x=t^{-1})$

12.84. $\int x\cdot(ax^2-b)^5\,dx;\ (ax^2-b=t)$

12.85. $\int \frac{1}{x}\sqrt{25-4x^2}\,dx;\ \left(x=\frac{5}{2}\,\text{sen}\, t\right)$

12.86. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\text{sen}^2 x}};\ (t=\text{sen}\, x)$

12.87. $\int \frac{dx}{x\sqrt{16+9x^2}}$

12.88. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

12.89. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

12.90. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+10}}$

12.91. $\int \frac{dx}{x^2-9}$

12.92. $\int \frac{x^2\,dx}{81-x^4}$

12.93. $\int \frac{x^4-x^3-x-2}{x^3-x^2}\,dx$

12.94. $\int \frac{dx}{x+x^3}$

12.95. $\int \frac{dx}{e^{2x}-ae^x}$

12.96. $\int \frac{(2+\text{tg}^2\,\alpha)\,d\alpha}{\cos^4\alpha(1+\text{tg}^2\,\alpha)}$

12.97. $\int \frac{\cos x\,dx}{12-6\,\text{sen}\, x+\text{sen}^2 x}$

12.98. $\int Th^2\, x\,dx$

12.99. $\int Sech^4\, x\,dx$

12.100. $\int e^x\cdot Sh\, x\,dx$

12.101. $\int x\cdot Ch\, x\,dx$

12.102. $\int \cos^3 x\,dx$

12.103. $\int \cos^2 2x\cdot \text{sen}^4\, 2x\,dx$

12.104. $\int \text{sen}^2\, x\cdot\cos^3 x\,dx$

12.105. $\int \cos^4 3x\,dx$

12.106. $\int \frac{dx}{\text{sen}^4\, x}$

12.107. $\int \frac{dx}{\text{sen}^3\, x}$

12.108. $\int \cos 5x\cdot \text{sen}\, 3x\,dx$

12.109. $\int \text{sen}\,\frac{x}{a}\cos\frac{2x}{a}\,dx$

12.110. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

12.111. $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$

12.112. $\int \frac{2x^2+41x-91}{x^3-2x^2-11x+12}\,dx$

12.113. $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

12.114. $\int \frac{dx}{[(x+1)(x^2+1)]^2}$

12.115. $\int \frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{x}$

12.116. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x+3}}$

12.117. $\int \frac{3x-2}{[(x-1)^2+3^2](x-1)}$

13

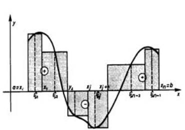
Integral definida. Aplicaciones

El concepto de integral definida de Riemann tiene un origen geométrico, a saber, el cálculo de áreas.

Integral definida como límite

Sea f una función definida para los $x_j \in [a, b]=I$, y $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, una división arbitraria del segmento $[a, b]$ en n partes. Entonces,

$$S_n=\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\cdot(x_{j+1}-x_j) \quad \text{con } \xi_j \in [x_j, x_{j+1}], \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$



es la suma algebraica de las áreas de los rectángulos formados por la división del segmento $I=[a, b]$, y recibe el nombre de *suma integral* de la función f en $[a, b]$.

Se llama *integral definida de Riemann* de la función f en $I=[a, b]$, al límite, si existe,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}} S_n=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot\delta_i, \quad \text{con } \delta=\text{máx } |\delta_i=(x_{i+1}-x_i)| \qquad [1]$$

Ese límite [1] se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$.

Funciones integrables Riemann

Para decir que f es integrable Riemann en el intervalo $I=[a, b]$, usaremos la siguiente notación:

$$f \in \mathcal{R}(I)$$

Teorema 1

Si f es continua en $I=[a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$.

Teorema 2

Si f es monótona y acotada en $I=[a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$.

En ambos casos el límite [1] existe y es independiente de la forma de división del segmento $I=[a, b]$ de integración, en segmentos parciales y de la elección de los ξ_i, dentro de dichos segmentos. Véanse los problemas 13.1 y 13.2.

Teorema 3

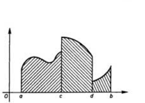
La condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathcal{R}(I)$ es que el conjunto de puntos de discontinuidad de f en I, se pueda cubrir con familias de intervalos abiertos, cuya suma de longitudes sea tan pequeña como se quiera.

Como un conjunto numerable (finito o no) es del tipo del enunciado, si f tiene un conjunto numerable de discontinuidades en $I \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$. Gráficamente, en la figura se observa que $f(x)$ es discontinua en $x=c$ y $x=d$ (dos puntos).

Entonces, según el teorema 1, existen las integrales

$$\int_a^c f(x)\,dx, \quad \int_c^d f(x)\,dx$$

$$\text{y} \quad \int_d^b f(x)\,dx$$



Y por la aditividad del área de Jordan, resulta que

$$\int_a^b f(x)\,dx=\text{área rayada}=\int_a^c f(x)\,dx+$$
$$+\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx.$$

Los problemas 13.3 y 13.4 son aplicaciones de lo que queda dicho.

Valor medio integral

Si $k_1 \leqslant f(x) \leqslant k_2$ y $g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$,

$$k_1 \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \leqslant k_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx, \text{ con } \mu \in [k_1, k_2]$$

En el caso de que $g(x)=1$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

Al número real μ se le llama *valor medio integral*.

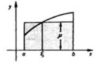
Además, si f es continua en $I=[a, b]$, se tiene:

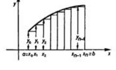
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b-a), \text{ con } \xi \in (a, b)$$

entonces,

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx, \text{ también llamado } \textit{promedio integral}.$$

Es decir, como puede analizarse en el problema 13.5, el promedio integral de una función continua en un intervalo, es la ordenada de la función en un cierto punto del mismo.





Función integral y primitiva. Regla de Barrow

Siendo $f \in R(I)$, se llama *función integral* de f en $I=[a, b]$, a la función

$$F(X) = \int_a^X f(x)\,dx, \quad \forall x \in I=[a, b]$$

Además, F es continua en $[a, b]$.

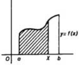
Según el teorema 1, toda función continua es integrable Riemann, pero no son las únicas.

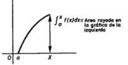
Regla de Barrow

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } I=[a, b] \\ F \text{ derivable en } I=[a, b] \\ F'=f \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

Adviértase que si existe $F(X)=\int_a^X f(x)\,dx$, según lo anterior, se puede considerar $F(x)=\int f(x)\,dx$. Es decir, que el problema de hallar la primitiva de $f(x)$ ha quedado reducido al problema de hallar un área.

La función primitiva es precisamente la función área; pero si la primitiva no existe como combinación de funciones elementales, sí existe como área. Esto es, no es lo mismo función integral que primitiva; ahora bien, en el caso de que f sea continua, tiene función primitiva que coincide con su función integral, y de ella se deducen todas, sumándole una constante arbitraria.





Con esto, la regla de Barrow se puede enunciar de forma más general, cambiando la hipótesis de ser f continua en $[a, b]$, por la más débil de ser f integrable en $[a, b]$. Además, teniendo en cuenta el teorema 3, se puede enunciar:

Teorema 4

Si f tiene un conjunto numerable de discontinuidades en $I=[a, b]$,

F es continua en I
F derivable en I, excepto en un conjunto numerable de puntos
$F'=f$

Se mantiene el resultado: $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

En los problemas 13.5, 13.6, 13.7 y 13.8 se ejemplariza la aplicación de la regla de Barrow.

Cambio de variable

— $f(x)$ continua en $I=[a, b]$
— $x=\varphi(t)$ continua en $[\alpha, \beta]$, donde $a=\varphi(\alpha)$ y $b=\varphi(\beta)$
— $\varphi'(t)$ continua en $[\alpha, \beta]$
— $(f \circ \varphi)(t)$ continua en $[\alpha, \beta]$

Entonces es válido que

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$$

También es legímita la fórmula en el caso de que los puntos de discontinuidad de $f(x)$, $\varphi(t)$ y $\varphi'(t)$, sean numerables, cumpliendo las demás hipótesis enunciadas.

Es evidente que al efectuar el cambio de variable que cumpla las hipótesis, deberá cuidarse, además, de la validez de las fórmulas elementales que se utilicen, en el intervalo considerado.

Véanse, a este respecto, los problemas 13.9 y 13.10.

Integración por partes

Sean f y g derivables en $I=[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx+\int_a^b g(x)\cdot f'(x)\,dx=f(b)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a),$$

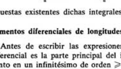
supuestas existentes dichas integrales.

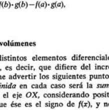
Elementos diferenciales de longitudes, áreas y volúmenes

Antes de escribir las expresiones de los distintos elementos diferenciales (diferencial es la parte principal del incremento, es decir, que difiere del incremento en un infinitésimo de orden $\geqslant 2$), conviene advertir los siguientes puntos.

Ha de tenerse en cuenta que la *integral definida* en cada caso será la *suma algebraica* de las áreas limitadas por la curva y el eje OX, considerando positivas las áreas situadas por encima del eje, ya que ése es el signo de $f(x)$, y negativas por debajo del eje de abscisas, por análoga razón.

En casi todos los casos interesa —problema geométrico— calcular un área, sin distinción del signo en la separación del eje OX. En otros muchos, el área estará limitada por dos o más curvas (no concurrentes en el intervalo de integración), o por una función multiforme; pero con un simple cálculo algebraico queda reducido al primer caso.



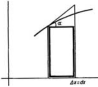


$$\text{Area}=\int_a^b |f(x)|\,dx \qquad \text{Area}=\int_c^d (y_3-y_2)\,dx+\int_a^d (y_1-y_4)\,dx+\int_d^b (y_1-y_2)\,dx$$

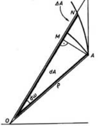
Nota. La función $g(x)=|f(x)|$ puede ser integrable Riemann, aunque $f(x)\notin R(I)$.

Elemento diferencial de área

(cartesianas)



(polares)

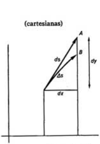


$$dA=y\,dx$$
$$|\Delta A-dA|<(tg\alpha)\cdot(dx)^2$$

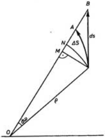
$$dA=1/2\,\rho^2\,d\omega$$
$$|\Delta A-dA|<\text{área }\widehat{AMN}=k(d\omega)^2$$

Elemento diferencial de arco. Rectificación de curvas planas

(cartesianas)



(polares)

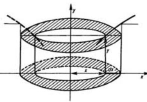


$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$
$$|ds-\Delta s|<AB=k(dx)^2$$

$$ds=\sqrt{(d\rho)^2+(\rho\,d\omega)^2}$$
$$=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\omega$$
$$|ds-\Delta s|<AB=k(d\omega)^2$$

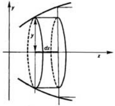
Elemento diferencial de volumen de revolución

Siendo $y=f(x)$ la sección meridiana de la superficie de revolución, es decir, su corte con el plano $z=0$, *Integración por discos* (eje *OY*)



$dV=\pi y^2\,dx$

Integración por tubos (eje *OX*)



$dV=2\pi x\cdot y\cdot dx$

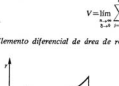
Volúmenes por secciones

Como puede verse en el problema 13.16, es posible calcular el volumen limitado por una superficie, siempre que se pueda calcular el área de cualquier sección paralela a uno de los planos coordenados.

Por ejemplo, si las secciones son paralelas al plano *YZ*, se suman los cilindros elementales que tienen como *bases* las áreas de las secciones $F(x_i)$, de la superficie, y como *alturas*, las distancias entre dos planos consecutivos, $\delta_i=x_{i+1}-x_i$. El límite de esa suma —que existe si $F(x)$ es continua— coincide con,

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}}\sum_{i=1}^{n}F(x_i)\cdot\delta_i=\int_a^b F(x)\,dx$$

Elemento diferencial de área de revolución



Se trata de calcular el área de la superficie que engendra el arco de la figura, al girar alrededor del eje *OX*.

La superficie engendrada por cada lado es un tronco de cono, de área

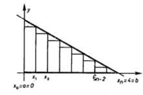
$$2\pi yh=2\pi\, f(\xi_i)\cdot h=2\pi\, f(\xi_i)\cdot ds$$

siendo $2\pi\, f(\xi_i)$ la longitud de la circunferencia media y h la apotema, que como infinitésimo equivalente, es la diferencia del arco ds.

$$d\,A_R=2\pi y\cdot ds$$

PROBLEMAS RESUELTOS

13.1. *Hállese el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta* $3x+4y-12=0$.



Se hace una partición del [0, 4] en n partes iguales

$$x_0=a=0<x_1 \ldots <x_n=b=4,$$

$$\text{con } x_{j+1}-x_j=\frac{4}{n}$$

Entonces, $\delta_j=\frac{4}{j}$, $\forall j$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \delta=0$$

$$x_j=x_0+j\cdot\frac{4}{n}=j\cdot\frac{4}{n}; \quad f(\xi_j)=y_{j+1}=3-\frac{3}{4}x_{j+1}=3\left(1-\frac{j+1}{n}\right)$$

$$S_n=\sum_{j=0}^{n-1} S_j=\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\cdot\delta_j=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{12}{n}\left(1-\frac{j+1}{n}\right)$$

Ahora bien,

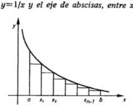
$$S_j-S_{j-1}=\frac{12}{n}\left[1-\frac{j+1}{n}-\left(1-\frac{j}{n}\right)\right]=\frac{-12}{n^2},$$

independiente del subíndice j, por lo que forman progresión aritmética de razón $-12/n^2$. En consecuencia,

$$\text{Area}=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(S_0+S_{n-1})\frac{n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}\left(1-\frac{1}{n}+1-\frac{n}{n}\right)\frac{n}{2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} 6\left(1-\frac{1}{n}\right)=6$$

13.2. *Calcúlese el área del trapecio mixtilíneo, limitado por la hipérbola* $y=1/x$ *y el eje de abscisas, entre* $x_0=a$ *y* $x_n=b$, *con* $0<a<b$.



Se divide el segmento [a, b] en puntos x_j tales que sus abscisas formen una progresión geométrica:

$$x_0=a<x_1=a\cdot q<x_2=a\cdot q^2<\ldots<x_n+aq^n=b;$$

de donde:

$$q^n=\frac{b}{a}>1 \quad \text{o bien} \quad q=\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}>1$$

$$\delta_j = x_{j+1} - x_j = aq^j(q-1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \delta = \lim_{j\to\infty} \delta_j = \lim_{j\to\infty} a \cdot \frac{b}{a} \cdot \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{1/j} - 1 \right] = 0$$

$$S_j = y_{j+1} \cdot \delta_j = \frac{1}{a \cdot q^{j+1}} aq^j(q-1) = \frac{q-1}{q} = 1 - \frac{1}{q},\ \forall j$$

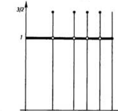
$$\text{Area} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} S_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{q}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \lim_{n\to\infty} n \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-n \left[\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}} - 1 \right] \right)^{*} \simeq \lim_{n\to\infty} \left[-nL \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}} \right] = \lim_{n\to\infty} nL \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} L \frac{b}{a} = L \frac{b}{a}$$

* Ya que si $\alpha \to 1 \Rightarrow \alpha - 1 \simeq L\alpha$ (infinitésimos equivalentes).

13.3.



La función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } x \in [0, 1] - \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}_2^{\infty} \\ \frac{3}{2} \text{ para } x = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}_2^{\infty} \end{cases}$$

Tiene un número infinito de discontinuidades, pero es integrable Riemann, según el teorema 3:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1$$

13.4. *Sea la función de Dirichlet, en el $I = [a, b]$, del modo siguiente:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathcal{R} - Q \\ 1 \text{ si } x \in Q \end{cases}$$

Fácilmente se observa que el límite de la suma integral no existe, ya que el de las sumas inferiores es 0, y el de las superiores $b - a \Rightarrow f \notin \mathcal{R}(I)$.

13.5. *Hállese la abscisa ξ del teorema del valor medio, para la integral*

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx, \text{ con } a \cdot b > 0$$

Se puede aplicar la regla de Barrow, ya que $F(x)=-\frac{1}{x}$ es una primitiva de $f(x)=\frac{1}{x^2}$, y es continua y derivable en $[a, b]$, pues a y b son del mismo signo. Además, $f(x)=\frac{1}{x^2}$ es continua en $[a, b]$ por lo mismo, luego:

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{dx}{x^2}=\frac{1}{b-a}[-1/x]_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{ab}>0$$

por ser $f(x)$ continua, $\exists\xi\in(a, b)\,/\,f(\xi)=\mu \Rightarrow \xi=\sqrt{ab}$, que, como puede verse, no es el punto medio de $[a, b]$, pues $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$.

13.6. *No es correcto el cálculo:* $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=[\text{arc tg}\, x]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$ *ya que, aunque* $\text{arc tg}\,1=\frac{\pi}{4}$ *y* $\text{arc tg}\,(-1)=\frac{3\pi}{4}$, *estos valores corresponden a una determinación de* $\text{arc tg}\, x$, *que en* $\pi/2$ *es discontinua.*

Tomando el valor principal *continuo* $-\pi/2<\text{arc tg}\, x<\pi/2$, resulta el cálculo válido:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=[\text{arc tg}\, x]_{-1}^{1}=\pi/4-(-\pi/4)=\pi/2$$

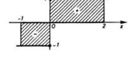
13.7. *El desarrollo* $\int_{-1}^{2}$ *signo* $x\,dx=[|x|]_{-1}^{2}=|2|-|1|=1$, *es correcto, pues:*

1) $f(x)=$signo x es discontinua solamente en $x=0\in[-1, 2] \Rightarrow f\in R(I)$.

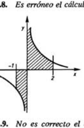
2) $g(x)=|x|$ es continua en $[-1, 2]$, primitiva de $f(x)$ y, además, derivable en $[-1, 2]$, salvo en el punto $x=0$.

En cambio, si se pide el área comprendida por la función con el eje OX en el $I=[-1, 2]$, se observa que será:

$$\begin{aligned}\text{Area}&=\int_{-1}^{2}|\text{signo } x|\,dx=\\&=\int_{-1}^{0}|\text{signo } x|\,dx+\int_{0}^{2}|\text{signo } x|\,dx=\\&=\int_{-1}^{0}dx+\int_{0}^{2}dx=1+2=3\end{aligned}$$



13.8. *Es erróneo el cálculo* $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x}\,dx=[L|x|]_{-1}^{2}=L2-L1=L2$, *ya que*



1) $f(x)=\frac{1}{x}$ es discontinua sólo en $x=0\in[-1,2] \Rightarrow f\in\mathcal{R}(I)$.

2) $g(x)=L|x|$ es primitiva de $f(x)$, derivable en dicho intervalo, excepto para $x=0$. Pero es discontinua en $x=0$, por lo que no es válido aplicar la regla de Barrow en este caso.

El área se hace infinita.

La integral se hace divergente.

13.9. *No es correcto el cambio* $\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{5\pi/6}\cos^2 t\,dt$, *pues al elegir el nuevo intervalo* $t\in[0,5\pi/6]$, *por ser sen* $0=0$ *y sen* $5\pi/6=1/2$, *ocurre:*

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ continua en $[0,1/2]$.
$x=\varphi(t)=\operatorname{sen} t$ y $\varphi'(t)=\cos t$, continuas en $[0,5\pi/6]$.

Pero la igualdad $(f\circ\varphi)(t)=\cos t$ es falsa en $[0,5\pi/6]$, ya que $\cos t=-\sqrt{1-x^2}$ en el segundo cuadrante, en este caso, en $[\pi/2,5\pi/6]$.

Si en lugar del intervalo anterior se hubiera elegido el $[0,\pi/6]$, entonces, $\varphi(t)=\operatorname{sen} t$ es monótona (creciente) en él, luego la correspondencia con el $[0,1/2]$ es inyectiva por medio de $t=\operatorname{arc\,sen} x$ y ahora sí se cumplen las condiciones de cambio de variable, con lo que

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=\left\{\begin{array}{l}x=\operatorname{sen} t\\ dx=\cos t\,dt\end{array}\right\}=\int_0^{\pi/6}\cos^2 t\,dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2t\right]_0^{\pi/6}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

13.10. *Calcúlese*

$$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

Como $3+2x-x^2=4-(x-1)^2$, sugiere el cambio $x-1=2\operatorname{sen} t$. Entonces:

$$\left\{\begin{array}{l}x=1\Rightarrow \operatorname{sen} t=0,\ t=0\\ x=3\Rightarrow \operatorname{sen} t=1,\ t=\pi/2\end{array}\right\}\text{ El nuevo intervalo de integración es } t\in[0,\pi/2]$$

Analicemos:

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ es continua en $[1,3)$, es decir, discontinua solamente en el punto $x=3\in[1,3]$.

2) $x=\varphi(t)=1+2\operatorname{sen} t$ y $\varphi'(t)=2\cos t$ son continuas en $[0,\pi/2]$.

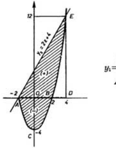
3) $(f\circ\varphi)(t)=\frac{1}{2\cos t}$ es correcta y discontinua en $t=\frac{\pi}{2}\in[0,\pi/2]$.

Por tanto, se cumplen las hipótesis del cambio de variable, y

$$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2\cos t}\cdot 2\cos t\,dt=\int_0^{\pi/2}dt=[t]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$$

Se podía haber hecho directamente:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}=$$



$$=\int_0^3 \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}=\left[\text{arc sen}\,\frac{x-1}{2}\right]_1^3=\frac{\pi}{2}$$

13.11. *Calcúlese el área limitada por las líneas* $y_1=x^2-4$ e $y_2=2x+4$:

$$A=A_{ACBOA}+A_{ABEA}=2A_{OCBO}+(A_{\widehat{ADE}}-A_{BED})=$$

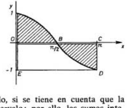
$$=2\int_0^2 |y_1|dx+\left(\int_{-2}^4 y_2dx-\int_2^4 y_1dx\right)=$$

$$=-2\int_0^2 (x^2-4)\,dx+\int_{-2}^4 (2x+4)\,dx-\int_2^4 (x^2-4)\,dx=$$

$$=-2\cdot\left(\frac{8}{3}-8\right)+36-\frac{32}{3}=36$$

13.12. *Calcúlese el área encerrada por la función* $y=\cos x$ y el eje OX, *en el intervalo* $I=[0,\pi]$.

Se pide $A=A_{AOB}+A_{BCD}$.
Entonces, parecería correcto,



$$A=\int_0^\pi \cos x\,dx=[\text{sen}\,x]_0^\pi=0,$$

resultado claramente falso.

No es de extrañar este resultado conseguido, si se tiene en cuenta que la función dada tiene distinto signo dentro del intervalo; por ello, las sumas integrales, también lo tienen. En definitiva, ha de actuarse así:

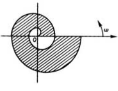
$$A=2\cdot A_{ABO}=(2\cdot A_{BDC})=2\cdot\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=2[\text{sen}\,x]_0^{\pi/2}=2$$

Adviértase que también se puede calcular tomando como variable de integración la y, pues $x=x(y)=\text{arc cos}\,y$, inyectiva en el intervalo $[-1,1]$, que es el recorrido de $y=\cos x$, en el $[0,\pi]$. En este caso,

$$A=A_{ABO}+(A_{OCDE}-A_{OBDE})=\int_0^1 \text{arc cos}\,y\,dy+\int_{-1}^0(\pi-\text{arc cos}\,y)\,dy=\text{(integración}$$

$$\text{por partes)}=[y\cdot\text{arc cos}\,y-\sqrt{1-y^2}]_0^1+[\pi y-y\cdot\text{arc cos}\,y+\sqrt{1-y^2}]_{-1}^0=1+1=2.$$

13.13. *Hállese el área comprendida entre la primera y segunda espiras de la "espiral de Arquímedes",* $\rho=a\cdot\omega$.



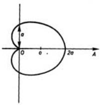
El área pedida es la encerrada por la segunda espira A_2, menos la determinada por la primera, A_1.

$$A_2=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} a^2\omega^2\,d\omega=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\omega^3}{3}\right]_{2\pi}^{4\pi}=\frac{28}{3}a^2\pi^3$$

$$A_1=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} a^2\omega^2\,d\omega=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\omega^3}{3}\right]_{0}^{2\pi}=\frac{4}{3}a^2\pi^3$$

$$A=A_2-A_1=8\,a^2\pi^3$$

13.14. *Hállese la longitud de la cardioide $\rho=a\,(1+\cos\omega)$.*



La tangente en el origen es la prolongación del eje polar OA. Luego el ángulo varía desde $-\pi$ a π.

Como

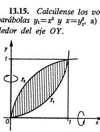
$$\begin{cases} x=\rho\cos\omega \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx=d\rho\cos\omega-\rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,d\omega \\ dy=d\rho\,\mathrm{sen}\,\omega+\rho\cos\omega\,d\omega \end{matrix}$$

Entonces,

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{d\rho^2+\rho^2\,d\omega^2}=\text{(en polares)}=$$
$$=\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\cdot d\omega=\text{Luego:}$$

$$L=\int_{-\pi}^{\pi} ds=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega+a^2(1+\cos\omega)^2}\,d\omega=a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\omega)}\,d\omega=$$
$$=2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{\omega}{2}\,d\omega=4a\left[\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=8a$$

13.15. *Calcúlense los volúmenes engendrados por la superficie común a las parábolas $y_1=x^2$ y $x=y_2^2$, a) al girar alrededor del eje OX; b) al hacerlo alrededor del eje OY.*



a) El volumen pedido es el engendrado por la $y_2=\sqrt{x}$, menos el que engendra la $y_1=x^2$, en sus giros alrededor del eje OX, en el $I=[0,1]$.

$$V=\pi\int_0^1 (y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_0^1 (x-x^4)\,dx=\frac{3}{10}\pi$$

b) Puede hacerse de dos maneras: por el método de discos o el de tubos.

Discos: $V=\pi\int_0^1 (x_1^2-x_2^2)\,dy=\pi\int_0^1 (y-y_2^4)\,dy=\pi\,[y^2/2-y^5/5]_0^1=\frac{3\pi}{10}$

Tubos: $V=2\pi\int_0^1 (y_2-y_1)\,x\,dx=2\pi\int_0^1 x(\sqrt{x}-x^2)\,dx=2\pi\int_0^1 (x^{3/2}-x^3)\,dx=\frac{3\pi}{10}$

13.16. *Calcúlese el volumen de una cuña, serrada por un leñador, en un tronco cilíndrico de radio R, de modo que sus bases formen un ángulo α, cortándose según un diámetro.*

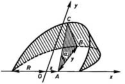
Sea el eje OX el diámetro de la base por el que pasa el plano de corte.

$$F(x)=A_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}y\cdot y\operatorname{tg}\alpha=$$

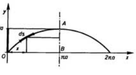
$$=\frac{y^2}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\cdot(R^2-x^2)$$

$$V=2\int_0^R F(x)\,dx=$$

$$=2\int_0^R\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\cdot(R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\alpha$$



13.17. *Hállese el área de la superficie engendrada al girar un arco de cicloide $x=a(t-\operatorname{sen}t)$; $y=a(1\cos t)$, alrededor de su eje de simetría.*



La superficie buscada está engendrada por la rotación del arco $\overset{\frown}{OA}$, alrededor de la recta AB, de ecuación $x=\pi a$.

Entonces, el eje de rotación está desplazado con respecto al eje OY, una distancia πa, lo que sugiere tomar como variable independiente la $y\in[0, 2a]$

$$A=2\pi\int_0^{2a}(\pi a-x)\,ds=\left\{\begin{matrix}y=0 & \Rightarrow & t=0\\ y=2a & \Rightarrow & t=\pi\end{matrix}\right\}=2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at+a\operatorname{sen}t)\,ds$$

Pero $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{[x'(t)dt]^2+[y'(t)dt]^2}=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$

Entonces,

$$A=2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at+a\operatorname{sen}t)\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at+a\operatorname{sen}t)\,2a\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\pi}\left(\pi\operatorname{sen}\frac{t}{2}-t\operatorname{sen}\frac{t}{2}+\operatorname{sen}t\cdot\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=4\pi a^2\left(-2\pi\cos\frac{t}{2}+2t\cos\frac{t}{2}-4\operatorname{sen}\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3\frac{t}{2}\right)_0^{\pi}=8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)\cdot a^2$$

Aplicaciones físicas

13.18. *Calcúlese el trabajo producido por una fuerza $\bar{F}$ al deformar un muelle, alargándolo hasta una longitud $\bar{x}$.*

Según la ley de Hooke, la fuerza es siempre proporcional al desplazamiento, $\bar{F}=k\cdot\bar{x}$. Entonces,

$$dW=\bar{F}\cdot d\bar{x}=F\cdot dx=k\cdot x\cdot dx$$

Y el trabajo total es:

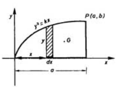
$$W=\int_0^x dW=\int_0^x kx\,dx=\frac{kx^2}{2}=\frac{Fx}{2}$$

Si se hubiera aplicado una fuerza *constante*, $\bar{F}_1=k\cdot\bar{x}$, con alargamiento final x, el trabajo sería

$$W=F\cdot x$$

La diferencia (el doble respecto de lo anterior) es que en este último caso ha habido pérdida de energía mecánica, al calentarse el muelle. Ese calor almacenado es, precisamente, la diferencia entre ambos trabajos.

13.19. *Hállese el centro de gravedad del segmento parabólico que muestra la figura, en función de las coordenadas del extremo P(a, b).*



$$A=\int_0^a \sqrt{kx}\,dx=\sqrt{k}\int_0^a x^{1/2}\,dx=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{k}\,a^{3/2}=\frac{2}{3}a\sqrt{ka}=\frac{2}{3}ab$$

Descompongamos en tiras elementales paralelas al eje OY, y tomemos momentos, respecto a dicho eje. El momento de cada tira es $y_i dx\cdot x_i$. La suma de los momentos de las tiras es $A\cdot x_G$. Entonces,

$$A\cdot x_G=\int_0^a y\,dx\cdot x=\int_0^a \sqrt{kx}\cdot x\,dx=\sqrt{k}\int_0^a x^{3/2}\,dx=$$

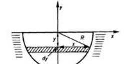
$$=\sqrt{k}\frac{2}{5}a^{5/2}=\frac{2}{5}\sqrt{ka}\cdot a^2=\frac{2}{5}a^2b$$

Análogamente, tomando momentos de esas tiras respecto al eje OX,

$$A\cdot y_G=\int_0^a y\,dx\,\frac{y}{2}=\frac{k}{2}\int_0^a x\,dx=\frac{k}{2}\,\frac{a^2}{2}=\frac{a\cdot b^2}{4}$$

De ambos valores conseguidos se deduce que $G(x_G, y_G)=G\left(\frac{3}{5}a,\ \frac{3}{8}b\right)$.

13.20. *Calcúlese la presión que soporta un semicírculo de radio R, sumergido verticalmente en agua, tal que su diámetro coincida con la superficie del líquido.*



Dividamos el semicírculo en tiras elementales, paralelas a la superficie del agua (eje OX).

El área de cada tira es: $dA=2x\cdot dy=2\sqrt{R^2-y^2}\,dy$.

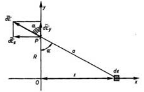
Según la ley de Pascal, la presión ejercida por un líquido sobre una superficie sumergida a una profundidad y es: $P=\rho\cdot y\cdot A$.

En el caso planteado, $\rho=1$ (peso específico); entonces,

$$P=\int_0^R y\,dA=\int_0^R 2y(R^2-y^2)^{1/2}\,dy=-\frac{2}{3}\left[(R^2-y^2)^{3/2}\right]_0^R=\frac{2}{3}R^3$$

13.21. *Dedúzcase el campo eléctrico —debido a una distribución de carga positiva— de un hilo largo, en un punto P situado fuera de él y a una distancia R del mismo.*

Sea m la masa por unidad de longitud de hilo, representado en la figura según el eje OX.



Entonces, la carga del elemento dx es $dq=m\cdot dx$.

El campo resultante es la suma vectorial de los campos creados por las cargas puntuales dq de los elementos dx.

En el punto P será:

$$\overline{dE}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{a^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot m\cdot\frac{d\bar{x}}{a^2} \qquad [1]$$

Como los campos de los otros elementos no tienen la misma dirección, no se puede integrar directamente [1]. Ahora bien, sí se pueden calcular las sumas de las diferentes componentes, según los ejes; es decir:

$$E_x=\int dE_x=\int dE\cdot\operatorname{sen}\alpha;\quad E_y=\int dE_y=\int dE\cdot\cos\alpha$$

Si ahora se considera que el hilo es infinitamente largo, los límites de integración variarán según $\alpha_1=-\pi/2$ y $\alpha_2=\pi/2$.

Además, según la figura, se tiene:

$$R=a\cdot\cos\alpha;\quad x=R\cdot\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow dx=\frac{R}{\cos^2\alpha}\,d\alpha.$$

En definitiva:

$$dE=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot m\cdot\frac{\cos^2\alpha}{R^2}\cdot\frac{R}{\cos^2\alpha}\,d\alpha=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{m}{R}\,d\alpha$$

Luego

$$E_x=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{m}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha=0$$

$$E_y=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{m}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{m}{R}\,[\operatorname{sen}\alpha]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{m}{R}$$

Conclusión: El campo eléctrico es $E=\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{m}{R}$ y perpendicular al hilo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

13.22. Hállese el área limitada por la función $y=x^2-4x+3$ y el eje de abscisas, en $I=[-1, 4]$.

13.23. Calcúlese el área comprendida entre la parábola $x=y^2-2y-8$, el eje de ordenadas y las rectas $y=-1$ e $y=2$.

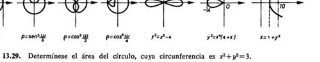
13.24. Calcúlese el área limitada por las parábolas $y^2=4x$ e $y^2=x+2$.

13.25. Calcúlese el área de la figura que resulta al girar la parábola $y=x^2$, sucesivamente 90°, 180° y 270°.

13.26. Hállese el área encerrada por la curva $y^2=x^4(x+5)$.

13.27. Calcúlese el área encerrada por la cicloide $\begin{cases} x=3(t-\operatorname{sen} t) \\ y=3(1-\cos t), \text{ en } I=[0, 2\pi]. \end{cases}$

13.28. Hállense las áreas encerradas por las curvas que se indican, sobre las gráficas que se proporcionan.



13.29. Determínese el área del círculo, cuya circunferencia es $x^2+y^2=3$.

13.30. Determínese el área de una elipse de semiejes a y b.

13.31. Calcúlese la longitud de $y=\sqrt{x^3}$, en $I=[0, 3]$.

13.32. Hállese la longitud del arco de catenaria $y=\frac{1}{2}k(e^{x/k}+e^{-x/k})$, entre $x=0$ y $x=k$.

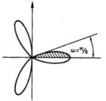
13.33. Determínense las longitudes de las curvas que se establecen, entre los límites que se fijan

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases} \text{ desde } t=0 \text{ a } t=4; \quad \begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\operatorname{sen} t \end{cases} \text{ desde } t=0 \text{ a } t=4$$

13.34. *a)* Hállese el área encerrada por la curva $\rho=a\cos 3\omega$, en el espacio rayado.

b) Encuéntrese el área determinada por $y=\operatorname{tg} x$ entre 0 y $\pi/4$.

c) Calcúlese el área determinada por $y=Lx$ entre 1 y 5.



13.35. Hállese la longitud de las curvas que se indican:

$$\rho=\omega^2 \text{ entre } \omega=0 \text{ y } \omega=2\sqrt{3}; \quad \rho=\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{3}; \quad \rho=\cos^2\frac{\omega}{2}; \quad \rho=\cos^4\frac{\omega}{4}$$

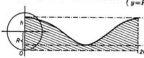
13.36. Area de $y=\operatorname{sen} x$ entre 0 y π.

Area de $y=\dfrac{2x}{(x-1)(x+2)}$ entre 3 y 5.

Area de $\begin{Bmatrix} x=t^2 \\ y=2t^3-3 \end{Bmatrix}$, desde $t=2$ a $t=5$.

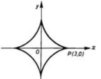
13.37. Area de $\begin{Bmatrix} x=R\cos t \\ y=R\operatorname{sen} t \end{Bmatrix}$, desde $t=0$ a $t=2\pi$.

13.38. Hállese el área rayada de la curva trocoide $\begin{Bmatrix} x=R\varphi+h\operatorname{sen}\varphi \\ y=R\ \ +h\cos\varphi \end{Bmatrix}$.

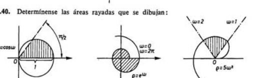


13.39. De la astroide que se dibuja en la figura, hállense su longitud y área que encierra.

$$\begin{cases} x=3\cos^3 t \\ y=3\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$$



13.40. Determínense las áreas rayadas que se dibujan:



13.41. Hállese la longitud de las siguientes curvas:

$y=2\,Ch\,\frac{x}{2}$, desde $x=0$ a $x=3$; $\qquad y=3x^{3/2}$, desde $x=1$ a $x=2$

$$\begin{Bmatrix} x=R(\varphi+\operatorname{sen}\varphi) \\ y=R(1+\cos\varphi) \end{Bmatrix}, \text{ desde } \varphi=0 \text{ a } \varphi=\pi$$

13.42. Determínese la longitud de las curvas que se indican:

$$\begin{Bmatrix} x=R\cos t \\ y=R\operatorname{sen} t \end{Bmatrix}, \text{ desde } t=0 \text{ a } t=\pi$$

$\rho=\omega^2$, desde $\omega=0$ a $\omega=2$

$\rho=2R\cos\omega$, desde $\omega=0$ a $\omega=\pi/2$

13.43. Calcúlese el área del sólido que resulta al girar alrededor del eje OX, la astroide del problema 13.39.

13.44. Determínese el área de una superficie esférica de radio R.

13.45. Hállese el área y el volumen del elipsoide de revolución que resulta al girar la elipse $x^2/16+y^2/4=1$, alrededor del eje OX.

13.46. Hállese el volumen del toro, engendrado por la circunferencia $x^2+y^2-4y+3=0$, al girar alrededor del eje OX.

13.47. Calcúlese el volumen que resulta al girar alrededor del eje de abscisas, el área limitada por la rama positiva de la parábola $y^2=4x$, en $I=[0, 4]$.

13.48. Hállese el volumen engendrado por la parábola del problema anterior, al girar alrededor del eje $x=4$.

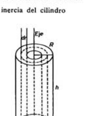
13.49. Dada la curva de ecuación $y=Ch\,x$, calcúlese en $I=[0, 1]$,

a) longitud de arco,
b) área de revolución, al girar alrededor del eje de abscisas,
c) volumen engendrado.

13.50. Determínese el volumen de un tronco de cono, de radios básicos R y r, y de altura h.

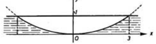
13.51. Calcúlese el volumen de una esfera de radio R.

13.52. Hállese el momento de inercia del cilindro circular recto de la figura.



13.53. Justifíquese que el momento de inercia de una barra homogénea, respecto de su eje perpendicular, por uno de sus extremos es $I=\frac{1}{3}\mathrm{m}\cdot l^2$.

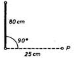
13.54. La parábola $y=\frac{1}{9}x^2$ determina el segmento parabólico que aparece en la figura, sumergido en agua, a nivel de superficie. Calcúlese la presión que soporta ese segmento parabólico.



13.55. Un hilo inextensible de 10 m de longitud y 2 kg de masa sujeta un cuerpo de 40 kg. Se enrollan 8 m del cable sobre un torno, elevando el cuerpo. Determínese el trabajo realizado.

13.56. La entrada a un depósito cilíndrico de radio r y h metros de altura es un agujero en su base. Determínese el trabajo que se hace al llenarlo con un líquido de densidad ρ.

13.57. Determínese la intensidad de campo eléctrico que produce en el punto P la distribución lineal de cargas de la figura, sabiendo que la densidad lineal es de 10^{-3} C/m.



13.58. Determínese el trabajo que se realizaría al mover una carga unidad desde el punto A$(-2, -1, -2)$ al B$(-1, -1/2, -1)$, a lo largo de la línea

$$\begin{cases} x=2(t-1) \\ y=t-1 \\ z=2(t-1) \end{cases}$$

Compruébese que este trabajo es igual a la diferencia de potencial entre ambos puntos. El campo está creado por una carga Q, colocada en el origen.

13.59. Discútase el cálculo de las siguientes integrales definidas:

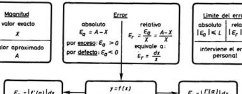
$$a)\ \int_1^3 \operatorname{tg} x\, dx; \qquad b)\ \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}; \qquad c)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\, dx$$

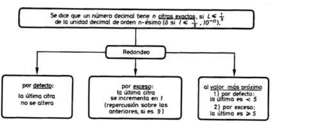
13.60. Calcúlese, mediante el paso al límite de la suma integral, las áreas limitadas por:

1) La recta $2x-3y=0$ y el eje de abscisas en el $I=[0, 6]$.
2) La parábola $y=x^2$ y el eje de abscisas en el $I=[0, 3]$.

14

Cálculo numérico. Aproximación. Interpolación





Polinomios. Ceros reales

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n/a_i \in R\ \forall i,\ n\in N$$

Cero o raíz de $f(x)$ es un $\alpha \in R \,/\, f(\alpha)=0$ (caso real).
Teorema del resto (Ruffini): El resto de dividir un polinomio por el binomio $x-a$ es $R=f(a)$.

Regla práctica para el cálculo de *raíces racionales.*

1.° Se ensayan los números $+1$ y -1 para averiguar si anulan a $f(x)$, aplicando Ruffini todas las veces que sea posible; se conservan los últimos restos $f(1)$ y $f(-1)$ cuando se llegue a división inexacta.
2.° Se determinan las cotas de las raíces (véase problema 14.7).
3.° Se calculan todos los divisores de a_n (y de a_0 si da el caso de fraccionarias) y se observa:

1) Los que quedan eliminados por (2.°).
2) Los que se eliminan por (#).
3) Con los que quedan se ensaya por Ruffini.

Nota. Si $f(0)$ y $f(1)$ son impares $\Rightarrow$ $f(x)$ no tiene ceros enteros.
Si ninguno de los números: $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{también lo}\\ \text{anterior}\end{matrix}\right\}$

Criterios de separación de raíces

Criterio de Sturm

El número de raíces simples o múltiples de $f(x)=0$, comprendidas en (a, b), es $V(a)-V(b)$, donde:

— $f_2(x)$, ..., $f_{n-1}(x)$, f_n son los polinomios, cambiados de signo, del algoritmo de m.c.d., aplicado a $f(x)$ y $f'(x)$;
— $V(a)$=variaciones de signo de la sucesión $f(a)$, $f'(a)$, $f_2(a)$, ..., $f_{n-1}(a)$, f_n;
— $V(b)$=variaciones de signo de la sucesión $f(b)$, $f'(b)$, $f_2(b)$, ..., $f_{n-1}(b)$, f_n.

Criterio de Budan-Fourier

El número de raíces, contada cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad, de $f(x)=0$ en (a, b), es $V(a)-V(b)-\dot{2}$, donde:

— $V(a)$=variaciones de signo de la sucesión $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$;
— $V(b)$=variaciones de signo de la sucesión $f(b)$, $f'(b)$, ..., $f^{(n)}(b)$.

Citaremos, además, el *Criterio de Descartes* sobre el número de raíces *positivas* de una ecuación, que dice: "El número de raíces positivas de una ecuación es $V-\dot{2}$, donde V es el número de variaciones de signo de la sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de coeficientes de la ecuación." (Véase el problema 14.8.)

Aproximación de raíces (Véanse los problemas 14.9 y 14.10.)

L) Sustituir la curva por la cuerda *(regula falsi)*
M) Sustituir la curva por la tangente en uno de los extremos *(Newton)*

en ambos casos $\boxed{\begin{array}{l}\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \\ \text{signo } f''(x) = \text{cte. en } (a, b)\end{array}}$ $f(x)$ en (a, b)

Nota. Se logra una mejor aproximación en el método de Newton si se elige el extremo en el que signo f=signo f''.

Interpolación. Extrapolación

Intervalo$=h=x_k-x_{k-1},\ k\in N.$ *Diferencia tabular*$=\triangle=y_j-y_{j-1},\ j\in N.$

si h=cte. y $\triangle$=cte. **Lineal**	si h=cte. y $\triangle \neq$ cte. **Newton**	si $h \neq$ cte. **Lagrange**

Lineal (por dos puntos)

$$y=\frac{y_1(x-x_0)-y_0(x-x_1)}{x_1-x_0}=y_{01}$$

Aitken (por n puntos)

$$y=y_{012,\ \ldots,\ n-2,\ n-1}=\frac{y_{12,\ \ldots,\ n-1}(x-x_0)-y_{012,\ \ldots,\ n-2}(x-x_{n-1})}{x_{n-1}-x_0}$$

Parabólica general (por n puntos)

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

donde

$$a_0=y_0 \quad \text{y} \quad a_k=\frac{y_k-y_{012\ \ldots\ k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})}$$

Lagrange (muy frecuente en la interpolación inversa).
La fórmula de interpolación de Lagrange permite escribir directamente la función polinómica de grado n, que pasa por los $n+1$ puntos $(x_0y_0), \ldots (x_ny_n)$.

$$y=y_0\underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}}_{\text{falta } x_0 \text{ como sustraendo}}+y_1\underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}}_{\text{falta } x_1 \text{ como sustraendo}}+\ldots+$$

$$+y_n\underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}}_{\text{falta } x_n \text{ como sustraendo}}$$

Newton

$$P(t)=y_0+.\binom{t}{1}\triangle y_0+\binom{t}{2}\triangle^2 y_0+\ldots+\binom{t}{n}\triangle^n y_0$$

Interpolación

Si x se encuentra entre dos valores de la *primera mitad* de la tabla,

$t=\dfrac{x_0-x}{h}$, *primera de Newton*

x_0 es el que precede a x en las tablas

Interpolación

Si x se encuentra entre dos valores de la *segunda mitad* de la tabla,

$t=\dfrac{x-x_n}{h}$ *segunda de Newton*

x_n es el que sigue a x en las tablas

Extrapolación

Si x es menor que los de la tabla, supuesta ordenada de menor a mayor.

Extrapolación

Si x es mayor que los de la tabla, supuesta ordenada de menor a mayor.

Integración aproximada

Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$. Se divide este segmento de integración en n partes iguales, y se elige el intervalo de cálculo $h=\dfrac{b-a}{n}$.

Entonces, si $x_j=x_0+j\cdot h$, $(a=x_0)$; $y_j=f(x_j)$, $j=0, 1, 2, \ldots, n$.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\begin{cases}\textbf{Trapecios } (n\in N)\text{: } h\cdot\left(\dfrac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)\\ \searrow\\ \quad\textit{tramos rectos}\\ \nearrow\\ \textbf{Poncelet } (n\text{: par})\text{: } h\cdot\left(\dfrac{y_0+y_n}{4}-\dfrac{y_1+y_{n-1}}{4}+2(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})\right)\\ \textbf{Simpson } (n\text{: par})\text{: } \dfrac{h}{3}[(y_0+y_n)+4(y_1+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+\ldots+y_{n-2})]\\ \textit{(arcos de parábola)}\end{cases}$$

Para facilitar el manejo de las fórmulas, usaremos el siguiente simbolismo, suponiendo n un número par:

E=suma de ordenadas extremas$=y_0+y_n$
E'=suma de ordenadas contiguas a las extremas$=y_1+y_{n-1}$
I=suma de ordenadas de índice impar$=y_1+y_3+\ldots+y_{n-1}$
P=suma de ordenadas de índice par$=y_2+y_4+\ldots+y_{n-2}$

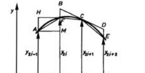
Nota. Para la referida paridad de los índices, hay que numerarlos desde el 0 y no desde el 1. Además, en el simbolismo anterior, fijémonos en que tanto en I como en P, no entran las ordenadas extremas.

Con todo ello, nos queda:

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

Trapecios	Poncelet	Simpson
$h.\left(\frac{E}{2}+I+P\right)$	$h.\left(\frac{E-E'}{4}+2I\right)$	$\frac{h}{3}(E+4I+2P)$
Error	Error	Error
$e_I \leq \frac{h^2}{12}(b-a).H$ $H = \text{máx}\,\lvert f''(x)\rvert$ en el intervalo $[a,b]$	$e_p \leq \frac{h}{4}\lvert E-E'\rvert$	$e_s \leq \frac{2}{3}.h.\left\lvert I-P-\frac{E}{2}\right\rvert$

Para conseguir una exactitud dada ε, se determina el *intervalo del cálculo h* a partir de las fórmulas del error en cada caso, y una vez hallado se *redondea* por defecto de forma que $\dfrac{b-a}{h}$ sea un número que nos dé el de divisiones n.
Si nos fijamos ahora en la figura adjunta (un trozo *convexo* de curva respecto al eje OY), observamos que



$$h = x_p - x_{p-1} \quad \forall p = 1, 2, \ldots, n$$

Area del trapecio mixto $PAFQ>$
$>$Area del trapecio $PAFQ=$

$$= h \cdot \frac{\overline{PA}+\overline{QF}}{2} = \frac{1}{2}\,h\,(y_{2i-1}+y_{2i})$$

y sumando todas las áreas resulta:

$$\text{Area} > s = h \cdot \left(\frac{E}{2}+P+I\right),$$

por lo que la fórmula de los trapecios nos da una *cota inferior*.

Además, área del trapecio mixto $QFCET <$área del trapecio $QBDT=$ $=QT \cdot RC = 2hy_{2i+1}$, y sumando todas las áreas, nos da: $\text{Area} < S = 2 \cdot h \cdot I$, como *cota superior*.

PROBLEMAS RESUELTOS

14.1. *En un análisis de laboratorio se ha encontrado una aleación de molibdeno al 43,284 por 100, estando este valor afectado de un error relativo menor que 1,5 por 1 000. Estúdiese el redondeo de dicha cantidad.*

Tenemos: $1 = 0{,}0015$, luego $L = 50 \times 0{,}0015 = 0{,}075$, y, por tanto, el error absoluto será: $\varepsilon_a < 0{,}075$.

Entonces, la cifra 8 de las centésimas tendrá un error que podrá ser de hasta siete unidades de su orden; suprimiendo las cifras del número a partir de ésta, tendremos como valor redondeado 43,2 (por defecto).

Ahora bien, el error cometido al hacer ese redondeo será $\varepsilon_a<0{,}075+0{,}084=0{,}159$, y como $0{,}159>0{,}1$, no podremos asegurar que el número 43,2 tiene todas sus cifras exactas.

Si hacemos el redondeo *al valor más próximo* (por exceso), tomamos como valor el número: 43,3. La diferencia entre este número y el dado es: 0,016, por lo que $\varepsilon_a<0{,}075+0{,}016=0{,}091<0{,}1$, luego, en este redondeo, el número 43,3 tiene todas sus cifras exactas.

14.2. *Al hallar la tangente del ángulo que forman dos curvas, obtenemos el valor de tag $z=1{,}426$, con un error menor que 0,005; calculando el ángulo, resulta ser $z=54°\,58'$. ¿Qué error tiene el valor del ángulo hallado?*

De $z=\text{arc tag}\,x \Rightarrow E_a=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot dx \Rightarrow L=\dfrac{0{,}005}{1+(1{,}426)^2}=0{,}0017$ rad.

Como $0{,}0017$ rad$=6' \Rightarrow \varepsilon_a<6'$.

Comprobando en una tabla de valores trigonométricos, observamos que:

$$\text{tag}\,55°\,4'=\text{tag}\,(54°\,58'+6')=1{,}431=1{,}426+0{,}005$$

14.3. *Efectúese la suma: 2,75034+0,00532+0,7258913, dando el resultado con dos cifras decimales exactas.*

Como los sumandos no tienen todos el mismo número de cifras decimales, conviene, ante todo, tomarlos con el mismo número de cifras, y, de este modo, el error del resultado, al sumarlos, será menor que n unidades de este orden, siendo n el número de sumandos.

Entonces, en el caso de que el número de sumandos sea *cinco como máximo*, y todos aproximados con el mismo número de cifras decimales exactas, el resultado tendrá *una cifra exacta menos* que los sumandos.

En nuestro caso deberemos tomar *tres* cifras decimales en cada uno, haciendo el redondeo al valor más próximo; luego,

$$2{,}750+0{,}006+0{,}726=3{,}482$$

por lo que la suma será: 3,48 con todas las cifras exactas.

Nota. Si el número de sumandos excede de 5 y no llega a 50 habrá que suprimir las dos últimas cifras del resultado.

14.4. *Realícese el producto de los números: 0,00469817 y 392,421, tomando las cifras necesarias para que sea exacta la de las centésimas del resultado.*

Como $0{,}004\cdot 300=1{,}2 \Rightarrow$ la cifra de las centésimas ocupará el tercer lugar del resultado; entonces deberemos tomar los datos como cuatro cifras significativas exactas:

$$0{,}004698\cdot 392{,}4=1{,}8434952$$

luego el resultado es: 1,84.

Nota. Cuando se trata de multiplicar o dividir dos números aproximados con el mismo número de cifras significativas exactas (contadas en cada uno de ellos a partir de la primera significativa de la izquierda, *nunca a partir de la coma*) el resultado tiene una cifra significativa menos que los datos.

En el caso de que la primera de uno de ellos sea la unidad, ha de tomarse éste con una cifra más que el otro.

14.5. *Divídanse 137,4825 y 0,489658, obteniendo el resultado con cuatro cifras exactas.*

Según la última nota anterior, tomaremos: seis cifras en el dividendo, por ser la primera un 1, y cinco en el divisor.

$$\frac{137{,}483}{0{,}48966}=280{,}9 \text{ con todas sus cifras exactas}$$

14.6. *Pesamos una esfera de cristal de 4,37 cm de diámetro dentro y fuera de un líquido, para saber la densidad de este último. Fuera del líquido pesa 327,72 g, y dentro de él, 273,45 g. Calcúlense la densidad del líquido y el error cometido. Los datos se han hallado con todas sus cifras exactas.*

El volumen de la esfera es: $V=4/3\cdot\pi\cdot r^3=8/6\cdot\pi\cdot r^3=\pi/6\cdot(2r)^3=\pi/6\cdot x^3$, donde $x=2r$ es el diámetro, luego $V=43{,}45$ cm³.

El error relativo del diámetro, $\varepsilon_x=\dfrac{0{,}01}{4{,}37}=\dfrac{1}{437}<\dfrac{1}{400}$.

El relativo del volumen: $\varepsilon_v=\dfrac{\pi/6\cdot 3\cdot x^2\cdot dx}{\pi/6\cdot x^3}=3\cdot\dfrac{dx}{x}=3\cdot\varepsilon_x<\dfrac{3}{400}$.

El peso del líquido desalojado es: $327{,}72-273{,}45=54{,}27$ g, con un error absoluto $\varepsilon_a<0{,}02$ y error relativo $<\dfrac{0{,}02}{50}=0{,}0004$.

La densidad del líquido será, pues: $\rho=\dfrac{54{,}27}{43{,}45}=1{,}24902$, con un error relativo menor que: $\dfrac{3}{400}+0{,}0004=0{,}0075+0{,}0004=0{,}0079<0{,}008$, de donde su error absoluto será: $\varepsilon_\rho<0{,}008\cdot 1{,}25=0{,}01$.

Por tanto, es falsa la cifra de las milésimas (y las que le siguen), y la densidad del líquido es, en definitiva, $\rho=1{,}24$.

14.7. *Hállese la descomposición factorial de:*

$$f(x)=10\,x^6-x^5-112\,x^4+26\,x^3+253\,x^2-36$$

1.° *Acotación (Laguerre-Thibault):*

	10	-1	-112	26	253	0	-36
para $x=2$		20	38				
	10	19	-74, no se sigue, deben dar $\geqslant 0$				
para $x=3$		30	87				
	10	29	-25				
para $x=4$		40	156	176	808	4244	16976
	10	39	44	202	1061	4244	16940

entonces, 4 es cota superior de todas las raíces.

Haciendo $x=\dfrac{1}{x'}$, y cambiando de signo para que el nuevo a_0 sea positivo, queda: $36\,x^6-253\,x^4-26\,x^3+112\,x^2+x-10=f_1(x)$.

	36	0	-253	-26	112	1	-10
para $x=2$		72	144				
	36	72	-109				
para $x=3$		108	324	213			
	36	108	71	187	•	•	•

por tanto, $x=1/x'=1/3$ es cota inferior de las raíces positivas de $f(x)$.
Poniendo ahora $x=-x'$, resulta:

$$f(-x)=10\,x^6+x^5-112\,x^4-26\,x^3+253\,x^2-36=f(x')$$

y haciendo lo mismo con éste que con el anterior $\Rightarrow$ sus ceros positivos están en $(1/3,\ 4)$. En definitiva,

"las raíces del polinomio dado $f(x)$ están en: $(-4,\ -1/3)\cup(1/3,\ 4)$"

2.º *Raíces enteras:*

Todos los divisores naturales de 36 son:				Según la acotación hallada, sólo pueden ser:		Estas últimas deben cumplir, *a la vez*,
1	3	9				
2	6	18	$\longrightarrow$	$\{-1,\ -2,\ -3\}$ las negativas	$\longrightarrow$	$f(1)=140=\dot{\overline{x-1}}$
4	12	36		$\{1,\ 2,\ 3\}$ las positivas		$f(-1)=90=\dot{\overline{x+1}}$

$\Rightarrow$ las únicas posibles son: -3 y 2. Ensayemos por Ruffini,

	10	−1	−112	26	253	0	−36	
para −3		−30	93	57	−249	−12	+36	
	10	−31	−19	83	4	−12	0	$x_1=-3$ es cero simple
para −3		−30	183	−492	1227	−3693		
	10	−61	164	−409	1231	−3705 ≠ 0		
para 2		20	−22	−82	2	12		
	10	−11	−41	1	6	0		$\Longrightarrow$ $x_2=2$ es cero simple
para 2		20	18	−46	−90			
	10	9	−23	−45	−84 ≠ 0			

con ello, $f(x)$ sólo tiene dos ceros enteros, el -3 y el 2, y podemos poner:

$$f(x)=(x-2)\cdot(x+3)\cdot q(x)\ /\ q(x)=10\,x^4-11\,x^3-41\,x^2+x+6$$

3.º *Raíces fraccionarias* (p/q):

Los divisores del $\left\{\begin{matrix}\text{término independiente}\\ \text{coeficiente de mayor grado}\end{matrix}\right\}$ son $\left\{\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 5 & 10\end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow$

las raíces fraccionarias pueden ser:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{3}{10},\ \frac{6}{5},\ \text{junto con sus opuestas.}$$

Pero, según la acotación hallada en el apartado 1.°, *no pueden ser*: $\pm\frac{1}{5}$, $\pm\frac{1}{10}$, $\pm\frac{3}{10}$; y además de $\left.\begin{array}{l} q(1)=-35=\dot{\overline{q-p}} \\ q(-1)=-15=\dot{\overline{q+p}} \end{array}\right\} \Rightarrow$ solamente son posibles: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{-2}{5}$ y $\frac{-3}{2}$. Ensayando ahora por Ruffini,

	10	−11	−41	1	6	
para: −3/2		−15	39	3	−6	
	10	−26	−2	4	$\boxed{0}$	→ $x_3=-3/2$
para: −2/5		−4	12	−4		
	10	−30	10	$\boxed{0}$		→ $x_4=-2/5$

que son las únicas y además simples. Con lo cual,

$$q(x)=(x+3/2)\cdot(x+2/5)\cdot r(x) \text{ con } r(x)=10\cdot(x^2-3x+1)$$

de $x^2-3x+1=0 \Rightarrow x_5=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $x_6=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Con todo,

$$f(x)=10\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x+3/2)\cdot(x+2/5)\cdot\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

es la factorización buscada.

14.8. *Sepárense las raíces de* $f(x)=x^3-x^2-3x+1$.

1) *Criterio de Sturm*

En primer lugar, hallaremos los *polinomios de Sturm*:

	$0{,}33\,x-0{,}11$	$\frac{1}{6}\,(8{,}11\,x-3)$	$\frac{2}{3}$
x^3-x^2-3x+1	$3\,x^2-2\,x-3$	$6\,(0{,}37\,x-0{,}11)$	$9\cdot 0{,}37$
$\underline{-x^3+0{,}66\,x^2+x}$	$\underline{-3\,x^2+0{,}89\,x}$		
$/-0{,}34\,x^2-2\,x+1$	$/-1{,}11\,x-3$		
$\underline{+0{,}34\,x^2-0{,}22\,x-0{,}33}$	$\underline{+1{,}11\,x-0{,}33}$		
$/-2{,}22\,x+0{,}66=$	$/-3{,}33=-9\cdot 0{,}37=-f_3(x)$		
$=-f_2(x)=-6(0{,}37\,x-0{,}11)$			

Como *sólo* intervienen los *signos* y *no* los *valores absolutos*, podemos poner:

$x\rightarrow$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)=x^3-x^2-3\,x+1$	—	+	—	+
$f'(x)=3\,x^2-2x-3$	+	—	—	+
$f_2(x)=0{,}37\,x-0{,}11$	—	—	+	+
$f_3(x)=0{,}37$	+	+	+	+
variaciones	3	2	1	0
excesos	1	1	1	

Hay, por consiguiente, una raíz en $(-\infty, 0)$; otra en $(0, 1)$ y otra en $(1, +\infty)$.

2) *Criterio de Budan-Fourier:*

$x \rightarrow$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)=x^3-x^2-3x+1$	—	+	—	+
$f'(x)=3x^2-2x-3$	+	—	—	+
$f''(x)=6x-2$	—	—	+	+
$f'''(x)=6$	+	+	+	+
variaciones	3	2	1	0

$$\left.\begin{array}{r} V(-\infty)-V(0)-\dot{2}=1-\dot{2}=1 \\ V(0)-V(1)-\dot{2}=1-\dot{2}=1 \\ V(1)-V(+\infty)-\dot{2}=1-\dot{2}=1 \end{array}\right\} \text{pues de 1, el único } \dot{2} \text{ que se puede restar es el 0.}$$

Con esto, nos da el mismo resultado anterior.

3) *Criterio de Descartes:*

La sucesión de signos de los coeficientes de $f(x)$ es:

$$+ \;-\; - \;+ \Rightarrow V=2, \text{ luego, número de raíces}=2-\dot{2}=0 \text{ ó } 2$$

Para hallar el número de raíces negativas, transformamos $x=-x'$, y la nueva sucesión de signos de los coeficientes será:

$$- \;-\; + \;+ \Rightarrow V=1, \text{ de donde: } 1-\dot{2}=1 \text{ raíz negativa}$$

En resumen, y fijándonos en Sturm, tiene dos raíces positivas y una negativa.

14.9. *Hállese, con error menor que una centésima, la posible raíz de la función del ejercicio anterior* (14.8) *en el intervalo* (0, 1).

Desde luego, como ya vimos, sólo hay una raíz, y la calcularemos apoyándonos en el *teorema de Bolzano.*

$$f(x)=x^3-x^2-3x+1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(0)=+1 \\ f(1)=-2 \end{array}\right. \text{ luego, } x\in(0,1)\,/\,f(x)=0$$

Primera aproximación: Tomemos un valor intermedio $a_0=0{,}5\in(0,1)$, entonces,

$$f(a_0)=0{,}125-0{,}25-1{,}5+1<0 \Rightarrow x\in(0,a_0)=(0;\,0{,}5)$$

En cuanto a la *segunda y tercera aproximación* precisas, expresamos sus cálculos en las tablas que a continuación se realizan, señalando, en forma de recuadro, aquellos valores para los cuales la función cambia de signo.

(segunda) por la que $x\in(0{,}3;\,0{,}4)$ → (tercera) por la que $x\in(0{,}31;\,0{,}32)$

x	x^3-x^2-3x+1
0,1	0,001 − 0,01 − 0,3 + 1 = 0,689
0,2	0,008 − 0,04 − 0,6 + 1 = 0,368
0,3	0,027 − 0,09 − 0,9 + 1 = 0,037
0,4	0,064 − 0,16 − 1,2 + 1 = −0,296
0,5	0,125 − 0,25 − 1,5 + 1 = −0,625

x	x^3-x^2-3x+1
0,31	0,030 − 0,096 − 0,93 + 1 = 0,004
0,32	0,033 − 0,102 − 0,96 + 1 = −0,029
0,33	0,036 − 0,109 − 0,99 + 1 = −0,063
0,34	0,039 − 0,116 − 1,02 + 1 = −0,097
0,35	0,043 − 0,123 − 1,05 + 1 = −0,130

Y así sucesivamente se obtienen dos valores que difieren en menos que uno prefijado de antemano ε; cada uno de ellos es un valor aproximado de la raíz buscada, con error menor que ε.

Es posible que ésta no sea la única, pero desde el punto de vista de la resolución aproximada: *dos raíces deben considerarse iguales desde el momento en que su diferencia sea menor al grado de aproximación prefijado.*

En nuestro caso: raíz $x=0{,}31$ (por defecto) o raíz $x=0{,}32$ (por exceso), con error menor que 0,01.

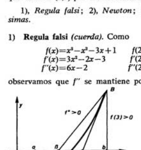
14.10. *Dada la misma función anterior, aproxímese —si procede— la raíz que está en* (2,3) *por los métodos de:*

1), *Regula falsi*; 2), *Newton*; 3), *mixto, con aproximación hasta las milésimas.*

1) **Regula falsi** *(cuerda).* Como

$$\begin{array}{lll} f(x)=x^3-x^2-3x+1 & f(2)=-1<0 \quad \text{y} & f(3)=10>0 \\ f'(x)=3x^2-2x-3 & f'(2)=\ \ 5>0 \quad \text{y} & f'(3)=18>0 \\ f''(x)=6x-2 & f''(2)=\ 10>0 \quad \text{y} & f''(3)=16>0 \end{array}$$

observamos que f'' se mantiene positiva. Con todo $\Rightarrow$ procede aplicarlos.



Nuestro caso es el de la figura adjunta.

El punto de corte β de la recta AB con las x viene dado por:

$$\begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \beta=\frac{23}{11}$$

También, directamente por la fórmula:

$$\beta=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{2\cdot 10-3(-1)}{10-(-1)}=\frac{23}{11}$$

2) **Newton** *(tangente).*

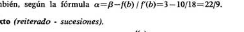
El extremo a elegir es $b=3$, pues $f''(3)$ y $f(3)$ son ambas positivas.

Recta tangente en $x=b$: $y-10=18(x-3)$, que corta a las x en $\alpha=\dfrac{22}{9}$

También, según la fórmula $\alpha=\beta-f(b)\,/\,f'(b)=3-10/18=22/9$.

3) **Mixto** *(reiterado - sucesiones).*

x	$f(x)$	$f'(x)$	$\dfrac{f(x)}{f'(x)}$	
3	10	18	0,556	$\alpha_1=3-0{,}556=2{,}444$
$\alpha_1=2{,}444$	2,293	10,031	0,228	$\alpha_2=\alpha_1-0{,}228=2{,}216$
$\alpha_2=2{,}216$	0,323	7,301	0,044	$\alpha_3=\alpha_2-0{,}044=2{,}172$



$$\beta_1=\frac{2\cdot f(3)-3\cdot f(2)}{f(3)-f(2)}=2{,}091 \qquad \beta_1=2{,}091 \xrightarrow{f} f(\beta_1)=-0{,}503$$
$$\beta_2=2{,}154 \longrightarrow f(\beta_2)=-0{,}108$$
$$\beta_2=\frac{\alpha_1\cdot f(\beta_1)-\beta_1\cdot f(\alpha_1)}{f(\beta_1)-f(\alpha_1)}=2{,}154 \qquad \beta_3=\frac{\alpha_2\cdot f(\beta_2)-f(\alpha_2)\cdot \beta_2}{f(\beta_2)-f(\alpha_2)}=2{,}169$$

14.11. *Los valores de la densidad de una disolución de una cierta sustancia a la temperatura ambiente de 20° C parà diferentes concentraciones (peso en tanto por ciento), son los de la tabla siguiente:*

Concentración	0,71	2,86	5,00	7,14	9,28
Densidad	1,0035	1,0140	1,0245	1,0350	1,0455

1) *Densidad de una disolución cuya concentración sea* 6,43 *por* 100.
2) *Concentración de una disolución cuya densidad es* 1,0382.

El intervalo es siempre 2,14, y la diferencia tabular es cte., 0,0105; por tanto, aplicaremos el caso *lineal.*

1) Como 6,43 está en (5,00; 7,14), la densidad pedida es:

$$\rho=y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot(x-x_0)=1{,}0245+\frac{0{,}0105}{2{,}14}(6{,}43-5)=1{,}0315$$

2) Ahora 1,0382 está entre los dos últimos de la tabla, luego

$$c=y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)=7{,}14+\frac{2{,}14}{0{,}0105}(1{,}0382-1{,}0350)=7{,}79$$

14.12. *Los valores de la tensión de vapor de agua, H, a diferentes temperaturas, se encuentran descritos en la tabla adjunta, en la que por comodidad y ser el intervalo constante, se ha realizado de paso el cuadro de diferencias.*

t	H	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	error
100	760,00	146,41	22,55	2,55	0,14	......
105	906,41	168,96	25,10	2,69	2,31	ε
110	1075,37	194,06	27,79	5,00	−8,07	-4ε
115	1269,43	221,85	32,79	−3,07	12,44	6ε
120	1491,28	254,64	29,72	9,37	−8,01	-4ε
125	1745,92	284,36	39,09	1,36	2,21	ε
130	2030,28	323,45	40,45	3,57	0,17	......
135	2353,73	363,90	44,02	3,74	0,19	......
140	2717,63	407,92	47,76	3,93		
145	3125,55	455,68	51,69			
150	3581,23	507,37				
155	4088,60					

a) *Corríjase algún dato, si estuviera equivocado.*
b) *Calcúlese la tensión de vapor de agua a las temperaturas:*

1), 112°; 2), 200°.

a) Si ocurre que uno de los valores de la función de la tabla está equivocado, en lugar de figurar el verdadero estará el $y_k+\varepsilon$, siendo y_k el cierto; al hallar las diferencias, arrastraremos ese error cada vez en mayor número de ellas. Veámoslo así:

y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	
y_1					$+\varepsilon$	......
y_2				$+\varepsilon$	-5ε	......
y_3			$+\varepsilon$	-4ε	$+10\varepsilon$	......
y_4		$\Delta_4^2+\varepsilon$	-3ε	$+6\varepsilon$	-10ε	......
y_5	$\Delta_5^1+\varepsilon$	$\Delta_5^2-2\varepsilon$	$+3\varepsilon$	-4ε	$+5\varepsilon$	......
$y_6+\varepsilon$	$\Delta_6-\varepsilon$	$\Delta_6^2+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	......
y_7						......
y_8						......
...	...	...	...	...	......	......

y examinando el cuadro, vemos que los coeficientes de ε en las diferencias de una columna siguen la ley de formación de los coeficientes del desarrollo del binomio $(a-b)^n$.

En nuestro caso se advierte claramente que en la columna de las diferencias cuartas hay error; en dicha columna, la primera diferencia y las dos últimas son aproximadamente iguales, y podemos tomar como valor medio 0,17. Entonces, 12,44 será igual a su valor verdadero (0,17) aumentado en $6\,\varepsilon$, de donde,

$$\varepsilon=\frac{12{,}44-0{,}17}{6}=2{,}045\cong 2{,}05$$

El valor equivocado es, pues, 1745,92, correspondiente a 125°. Su verdadero valor será:

$$1\,745{,}92-2{,}05=1\,743{,}87$$

que llevado de nuevo a la tabla, nos queda, como correcta:

	t	H	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
	100	760,00	146,41	22,55	2,55	0,14
	105	906,41	168,96	25,10	2,69	0,26
→	110	1075,37	194,06	27,79	2,95	0,13
	115	1269,43	221,85	30,74	3,08	0,14
	120	1491,28	252,59	33,82	3,22	0,19
	125	1743,87	286,41	37,04	3,41	0,16
	130	2030,28	323,45	40,45	3,57	0,17
	135	2353,73	363,90	44,02	3,74	0,19
	140	2717,63	407,92	47,76	3,93	
	145	3125,55	455,68	51,69		
	150	3581,23	507,37			
	155	4088,60				

b) El caso (1) es interpolación, y elegiremos la línea horizontal de la tabla correspondiente a la $t=110°$.

Entonces,

$$t=\frac{112-110}{5}=\frac{2}{5}=0{,}4$$

luego,

$$H_{112^\circ}=1\,075{,}37+0{,}4\cdot 194{,}06+\frac{0{,}4\,(0{,}4-1)}{2}\cdot 27{,}79+\frac{0{,}4\,(0{,}4-1)\,(0{,}4-2)}{6}\cdot 2{,}95+$$
$$+\frac{0{,}4\,(0{,}4-1)\,(0{,}4-2)\,(0{,}4-3)}{24}\cdot 0{,}13=1\,149{,}83$$

El caso (2) es extrapolación. Como $200>155$, elegimos la segunda de Newton y la última fila de todas de la tabla,

$$t=\frac{200-155}{5}=\frac{45}{5}=9$$

con lo que

$$H_{200^\circ}=4\,088{,}60+9\cdot 507{,}37+\frac{9\,(9-1)}{2}\cdot 51{,}69+\frac{9\,(9-1)\,(9-2)}{6}\cdot 3{,}93+$$
$$+\frac{9\,(9-1)\,(9-2)\,(9-3)}{24}\cdot 0{,}19=10\,869{,}83$$

14.13. *Hállese el polinomio interpolante de* $A(0, 2)$, $B(1, 5)$ *y* $C(3, -1)$.

Llamemos: $\left\{\begin{matrix}(x_0, y_0) & ; & (x_1, y_1) & ; & (x_2, y_2)\\ (0, 2) & ; & (1, 5) & ; & (3, -1)\end{matrix}\right\}$, como $\left\{\begin{matrix}x_1-x_0=1\neq x_2-x_1=2\\ y_1-y_0=3\neq y_2-y_1=-6\end{matrix}\right.$

no podemos aplicar Newton. Entonces,

Aitken

$$f(x)=y_{\boxed{0\,1\,2}}=\frac{y_{12}(x-x_0)-y_{01}(x-x_2)}{x_2-x_0}$$

pero

$$y_{12}=\frac{y_2(x-x_1)-y_1(x-x_2)}{x_2-x_1}=\frac{-1\cdot(x-1)-5(x-3)}{3-1}=-3x+8$$
$$y_{01}=\frac{y_0(x-x_0)-y_0(x-x_1)}{x_1-x_0}=\frac{5(x-0)-2(x-1)}{1-0}=3x+2$$

sustituyendo,

$$y_{0\,1\,2}=\frac{(-3x+8)\,(x-0)-(3x+2)\,(x-3)}{3-0}=\frac{1}{3}\,(-6x^2+15x+6)=-2x^2+5x+2$$

Parabólica general

$$f(x)=y_{012}=y_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)\,(x-x_1)$$

y ahora se trata de hallar a_1 y a_2.

Tenemos:

$$y_{01}=y_0+a_1(x-x_0)=2+a_1\cdot x\ ;\quad \text{para que pase por } (1, 5),$$
$$5=2+a_1 \Rightarrow a_1=3 \ \text{ luego } \ y_{01}=2+3x$$

Entonces,

$$y_{012}=y_{01}+a_2(x-x_0)\,(x-x_1)=2+3x+a_2\cdot x(x-1)$$

obligándole a que pase por

$$(x_2, y_2)=(3, -1) \;\Rightarrow\; -1=2+3\cdot 3+a_2\cdot 3(3-1),\;\; a_2=-2$$

En resumen,

$$f(x)=y_{012}=2+3x-2x(x-1)=-2x^2+5x+2$$

Lagrange

$$y=2\cdot\frac{(x-1)\,(x-3)}{(0-1)\,(0-3)}+5\cdot\frac{(x-0)\,(x-3)}{(1-0)\,(1-3)}-1\cdot\frac{(x-0)\,(x-1)}{(3-0)\,(3-1)}=$$

$$=\frac{2}{3}\,(x^2-4x+3)-\frac{5}{2}\,(x^2-3x)-\frac{1}{6}\,(x^2-x)=-2x^2+5x+2$$

14.14. Calcúlese:

$$A=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Dividimos el intervalo de integración [0, 1] en diez partes iguales, con lc que el intervalo de cálculo es $h=0{,}1$. Dispongamos de la tabla de valores:

x_i	$y_i=f(x_i)$	E	E'	I	P
0,0	1,000 000 00	...... +			
0,1	0,990 099 01	....	...... + ...	...... +	
0,2	0,961 538 46				+
0,3	0,917 431 19			+	
0,4	0,862 068 97				+
0,5	0,800 000 00	....	....	...... + ...	....
0,6	0,735 294 12				+
0,7	0,671 140 93			+	
0,8	0,609 756 10				+
0,9	0,552 486 19	....	...... + ...	...... +	
1,0	0,500 000 00	...... +			
		1,500 000 00	1,542 585,20	3,931 157 32	3,168 657 65

Trapecios

$$A=0{,}1\,\left(\frac{1{,}5}{2}+3{,}93115732+3{,}16865765\right)=\underline{0{,}784\,9814\,97}$$

Poncelet

$$A=0{,}1\,\left(\frac{1{,}5-1{,}54258520}{4}+2\cdot 3{,}93115732\right)=\underline{0{,}785\,1668\,34}$$

Simpsom

$$A=\frac{0{,}1}{3}\,(1{,}5+4\cdot 3{,}93115732+2\cdot 3{,}16865765)=\underline{0{,}785\,3981\,53}$$

Finalmente, la integración directa nos da el valor:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=[\text{arc tg } x]_0^1=\frac{\pi}{4}=\underline{0{,}785\ 3981\ 63}$$

Como se ve, la fórmula de Simpson conduce a un resultado mucho más aproximado que los anteriores.

Acotación de los errores

T)· de $y=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ y''=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$

luego máx $|y''|$ en $[0, 1]$ es 2, para $x=0$. Entonces,

$E_T \leqslant \frac{(0{,}1)^2}{12}\cdot 1\cdot 2=1/6\cdot 10^{-2}<0{,}002$. Y, por observación directa, $<0{,}0004$.

P)· $E_P \leqslant 0{,}1\cdot 0{,}0106\ldots<0{,}0011$. Por observación directa, $<0{,}0002$.

S)· $E_S \leqslant 2/3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}01249967<0{,}0009$. Directamente, $<0{,}000\ 000\ 01$

PROBLEMAS PROPUESTOS

14.15. Sabiendo que los números $a=12°\ 7'\ 14''$, $b=38{,}57$ cm, $c=647{,}8$ kg, tienen sus cifras exactas, calcúlense sus errores absolutos y relativos.

14.16. Determínense las cifras exactas y escríbanse en la forma que corresponde los números: 1) 48,361, con precisión del 1 por 100; 2) 592,8, con precisión del 2 por 1 000.

14.17. Súmense los números aproximados que se escriben con la aproximación que se indica:

1) $0{,}000875+65{,}108701+8{,}23001+0{,}01011$, hasta las milésimas,
2) $1{,}01806+0{,}780164\cdot 0{,}99909+3{,}45678-5{,}00017$, hasta las centésimas.
(Todos los números dados tienen todas sus cifras exactas.)

14.18. Calcúlese el cociente de las siguientes parejas de números aproximados:

a) 7,0018; 101,876 con todas sus cifras exactas.
b) 1760,19; 35,769 con precisión del 3 por 100.

14.19. El lado de un cuadrado es $x=46{,}8701008$, con un error de $e<0{,}00003$. Calcúlese su área sabiendo que: x está medido en hectómetros, y tomando e, 1.°, referente a kilómetros; 2.°, referente a hectómetros; 3.°, referente a milímetros.

14.20. Un cilindro de una cierta aleación metálica pesa 93,4 g. Sus dimensiones son: radio de la base=1 cm y altura, 11 cm. Calcúlese su peso específico si los errores en las medidas de longitud son del orden del 1 por 100 y en el peso del 10 por 100.

14.21. Hállese con qué exactitud deben tomarse los valores de π y de la aceleración de la gravedad, y la medida de la longitud de un péndulo, cuando se desea conocer el periodo de oscilación de un péndulo con un error relativo del 0,5 por 100, si dicho periodo es aproximadamente de 2 seg.

14.22. Pruébese que $(a+b)^n-(a-b)^n$ es divisible por 2, siendo $a, b, n \in Z$.

14.23. Simplifíquese la fracción $\dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x^3-6x^2+11x-6}$.

14.24. Hállense los valores naturales de x para que $\dfrac{28x^2+56x+90}{x^2+2} \in N$.

14.25. Dados $f(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+a$; $g(x)=x^3-4x^2+5x-2$, determínese a para que el m.c.d. de ambos sea de segundo grado y hállense las raíces de $f(x)$.

14.26. Un polinomio $f(x)$, dividido por $x+1$, da de resto -45, por $x-3$ da de resto -165. ¿Qué resto dará al dividirlo por x^2-2x-3? Determínese $f(x)$ sabiendo que es de cuarto grado y divisible por $x(x^2-4)$. ¿Cuáles son su raíces?

14.27. Dados $A(x)=x^{30}+1$, $B(x)=x^{45}+1$, encuéntrese M, N / $M \cdot A+N \cdot B=D=$ $=$m.c.d. (A, B).

14.28. Determínense a y b para que $x^4-8x^3+ax^2+bx+1$ sea cuadrado perfecto.

14.29. Hállese m para que las raíces de $x^4+6x^3-7x^2-36x+m$ estén en progresión aritmética.

14.30. Acótense las raíces de $f(x)=2x^4+4x^3-59x^2-61x+30$.

14.31. Hállense las raíces de los polinomios que se indican:

1) $x^3+(a+b+1)x^2+(ab+2b-1)x+(ab-a+b-1)$
2) $x^5+2x^4-2x^3-4x^2-3x-6$
3) $x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12$.

14.32. Separación y cálculo aproximado, hasta las centésimas, de las raíces de:

1) x^3-x+1
2) x^3-2x-5
3) $x^3-5x+0{,}1$
4) x^3-2x^2+3x-5
5) $100x^3+174x^2-252x-397$
6) $x^5+6x^4+9x^3-10x^2-36x-24$
7) $\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x^3-y=0 \end{cases}$

14.33. Sabiendo que las diferencias de cuarto orden son constantes, fórmese la tabla de la función $y=x^4-10x^3+2x^2+3x$, cuando $x \in [1, 10] \in N$.

14.34. Dada la tabla: log 1=0,000; log 2=0,301; log 3=0,477; log 4=0,602 y log 5=0,699, calcúlense:

log 7 log 1,7 log 2,5 log 3,1 log 4,6

14.35. Dada la tabla

sen 10° = 0,1736 sen 11° = 0,1908 sen 12° = 0,2079
sen 13° = 0,2250 sen 14° = 0,2419 sen 15° = 0,2588

dedúzcase otra más completa que contenga los valores de los senos cada medio grado en el intervalo [10°, 17°) utilizando para ello la fórmula de Newton.

14.36. Interpólense, por el método que más convenga, los puntos:

1) $A_0(1, 2)$; $A_1(3, 7)$; $A_2(4, -3)$.
2) $A_0(1, 3)$; $A_1(2, 5)$; $A_2(3, 1)$.
3) $A_0(0, 1)$; $A_1(2, -3)$; $A_2(3, 5)$; $A_3(4, 3)$; $A_4(5, 1)$.

14.37. Calculada la contracción x (en milímetros) de un muelle metálico en función de los pesos (en kilogramos) que actúan sobre él, tenemos la siguiente tabla:

x	5	10	15	20	25	30	35	40
P	49	105	172	253	421	473	619	793

Compruébese si los cálculos son correctos y determínese la carga que produzca una contracción de 18 mm del resorte.

14.38. Calcúlense por el método de los trapecios, determinando el error cometido, las

1) $\int_0^1 (5x^2-4x)\,dx$ 2) $\int_0^1 \frac{dx}{2+x}$ 3) $\int_2^3 \frac{dx}{1-x}$

y en la primera, hállese el intervalo del cálculo si se pide con exactitud del 4 por 1 000.

14.39. Determínense, con exactitud hasta 0,01, las siguientes integrales definidas:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ 2) $\int_0^e \frac{Lx}{x}\,dx$ 3) $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

14.40. Un horno ha estado encendido durante ocho horas, habiéndose medido la temperatura al empezar a arder y al terminar cada hora, con los siguientes resultados:

T °C	25,3	236,5	318,4	342,3	332,1	306,8	297,4	142,1	46,3
Hora	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Calcúlese su temperatura media.

15

Sucesos aleatorios. Frecuencia y probabilidad

Espacio muestral$=H$; card $(H)=n$; card $[P(H)]=2^n$.
Se puede escribir para un suceso: $A \subset H$ o $A \in P(H)$.
$A \subset H$ y $B \subset H$ son incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.
Para demostrar que dos sucesos son iguales ha de justificarse su inclusión recíproca: $A=B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

$$A \text{ y } \bar{A} \text{ son sucesos contrarios} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Incompatibilidad: } A \cap \bar{A} = \varnothing \\ \text{Recubrimiento: } A \cup \bar{A} = H \end{cases}$$

La estructura de $[P(H), \cup, \cap]$ es:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} L_1 \text{ Absorción } \cup \text{ y } \cap \\ L_2 \text{ Idempotencia } \cup \text{ y } \cap \\ L_3 \text{ Asociatividad } \cup \text{ y } \cap \\ L_4 \text{ Conmutatividad } \cup \text{ y } \cap \end{array}\right\} \text{Retículo} \\ L_5 \text{ Complementariedad } \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \text{Retículo complementario} \\ L_6 \text{ Distributividad } \cup \text{ y } \cap \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \text{Algebra de Boole}$$

Frecuencia absoluta del suceso $A=n'=$número de éxitos, o sea, número de veces que ha salido A.

Frecuencia relativa del suceso A: $f(A)=h_A=\dfrac{n'}{n}$, siendo $n=$número de pruebas realizadas o ensayos.

Como $n' \leqslant n$, $f(A)=h_A \leqslant 1$.
Para el suceso seguro, $n'=n$; entonces, $f(H)=1$.
Para el suceso imposible, $n'=0$; entonces, $f(\varnothing)=0$.

Regla de Laplace: La probabilidad de un suceso es el cociente entre los casos favorables (éxitos) y los casos posibles, considerados *equiprobables e incompatibles.*

Teorema de la probabilidad total:

$$\forall A, B \in P(H); \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Si $A \cap B = \varnothing$, entonces, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Probabilidades condicionadas:

$$A, B \in p(H); \quad A \neq \varnothing; \quad B \neq \varnothing; \quad A \cap B \neq \varnothing$$

Probabilidad de B condicionado a $A = p(B/A)$.
$p(B/A)$ = probabilidad de que, habiéndose verificado A, lo haga B.

Teorema de la probabilidad compuesta:

$$\forall A, B \in P(H),\ A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing$$
$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

Sucesos independientes: A y B son independientes $\Leftrightarrow p(B) = p(B/A)$.

Teorema de Bayes:

Hipótesis: $H = \{h_1, h_2, h_3\}$
Probabilidades "a priori": $p(h_1)$, $p(h_2)$, $p(h_3)$
$A \subset H$
Verosimilitudes: $p(A/h_1)$, $p(A/h_2)$, $p(A/h_3)$

El teorema de Bayes permite conocer las probabilidades "a posteriori", mediante la siguiente expresión (análogas fórmulas para $p(h_2/A)$ y $p(h_3/A)$):

$$p(h_1/A) = \frac{p(h_1) \cdot p(A/h_1)}{p(h_1) \cdot p(A/h_1) + p(h_2) \cdot p(A/h_2) + p(h_3) \cdot p(A/h_3)}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

15.1. *Diferencia de sucesos, $A - B$, es otro suceso que se verifica cuando, haciéndolo A, no lo hace B. Así, si $A = \{h_1, h_2, h_3\}$, $B = \{h_3, h_4, h_5\}$, entonces $A - B = \{h_1, h_2\}$.*

Sabiendo esto, demuéstrese que las dos definiciones de diferencia simétrica

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

son equivalentes.

1.° Demostremos que $(A \cup B) - (A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A)$

$$\begin{aligned}[\forall h \in (A \cup B) - (A \cap B)] &\Rightarrow [(h \in A) \vee (h \in B) \wedge h \notin (A \cap B)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [(h \in A) \wedge (h \notin B)] \vee [(h \in B) \wedge (h \notin A)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow h \in (A - B) \cup (B - A) \qquad (1)\end{aligned}$$

2.° Demostremos que $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (A \cap B)$

$$\begin{aligned}[\forall h \in (A - B) \cup (B - A)] &\Rightarrow [h \in (A - B) \vee h \in (B - A)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [(h \in A) \wedge (h \notin B) \vee (h \in B) \wedge (h \notin A)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [h \in (A \cup B) \wedge h \notin (A \cap B)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow h \in (A \cup B) - (A \cap B) \qquad (2)\end{aligned}$$

Demostradas las dos inclusiones, queda demostrada la igualdad pedida.

15.2. *Simplifíquese:* $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) &= [(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})] \cap (\bar{A} \cup B) && \text{por } L_2 \\ &= [A \cup (B \cap \bar{B})] \cap (\bar{A} \cup B) && \text{por } L_6 \\ &= [A \cup \varnothing] \cap (\bar{A} \cup B) && \text{por } L_5 \\ &= A \cap (\bar{A} \cup B) && \text{por } L_7 \text{ (ley de identida} \\ &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) && \text{por } L_6 \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) && \text{por } L_5 \\ &= A \cap B && \text{por } L_7\end{aligned}$$

15.3. *Justifíquese que la complementación del álgebra de Boole de los sucesos es involutiva; es decir, que* $\forall A \subset H$, $\bar{\bar{A}} = A$.

Sea $B \subset H$; según L_5, $B \cup \bar{B} = H$; $B \cap \bar{B} = \varnothing$

según L_4, $\bar{B} \cup B = H$; $\bar{B} \cap B = \varnothing$

Supóngase que el suceso B es el contrario del A; o sea, $B = \bar{A}$. Sustituyendo,

$$\bar{\bar{A}} \cup \bar{A} = H; \; \bar{\bar{A}} \cap \bar{A} = \varnothing$$

Como el axioma de complementariedad (L_5) ha de cumplirse y el contrario de un suceso es único, resulta que $\bar{\bar{A}} = A$.

15.4. *Para preparar Matemáticas o Química, un grupo de cuarenta estudiantes se sientan por parejas. Se sabe que treinta alumnos del grupo cursan Matemáticas y veinticinco estudian Química. ¿Qué probabilidad hay de que coincidan dos alumnos que puedan trabajar en común, en una o en las dos asignaturas citadas?*

$30 + 25 - 40 = 15$ alumnos hacen las dos asignaturas

Sucesos: M=cursar ambos Matemáticas
Q=cursar ambos Química
$M \cap Q$=cursar ambos las dos asignaturas
$M \cup Q$=cursar ambos, una, otra o las dos asignaturas

$$p(M \cup Q)=p(M)+p(Q)-p(M \cap Q)$$

$$p(M \cup Q)=\frac{\binom{30}{2}}{\binom{40}{2}}+\frac{\binom{25}{2}}{\binom{40}{2}}-\frac{\binom{15}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{435+300-105}{780}=0{,}80$$

15.5. *En una clase hay quince chicas y veinticinco chicos. En una prueba escrita de Matemáticas ha habido dieciocho insuficientes, de los que ocho corresponden a las chicas. ¿Qué probabilidad hay de extraer de las cuarenta hojas de examen una que, perteneciendo a una alumna, sea insuficiente?*

Sucesos: A=extraer insuficiente,
B=extraer prueba de alumna,
A/B=extraer una hoja que, siendo de alumna, esté insuficiente.

Probabilidad de A condicionada a B.
El muestral del suceso A/B es B, puesto que se supone verificado. Así, pues:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Casos posibles de } A/B=\text{los de } B=15\\ \text{Casos favorables}=8\end{array}\right\} p(A/B)=8/15$$

15.6. *¿Qué probabilidad hay de que habiendo extraído de una baraja de cuarenta naipes una carta "bastos" sea figura?*

Sucesos: A=bastos,
B=figura,
$A \cap B$=figura de bastos.

$$p(A \cap B)=p(A)\cdot p(B/A)$$

$$p(A \cap B)=3/40;\quad p(A)=10/40;\quad p(B/A)=3/40 : 10/40=0{,}3$$

15.7. *En la categoría de pruebas "lanzar un dado al aire y leer su cara superior en reposo" se consideran los siguientes sucesos:*

A=obtener un número mayor que 4,
B=conseguir un múltiplo de 3,
C=obtener un número impar,
D=conseguir un número mayor o igual que 5.

Decídase si los pares A, B y C, D, son o no sucesos independientes.

$$H=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\};\quad A=\{h_5, h_6\};\quad B=\{h_3, h_6\}$$
$$C=\{h_1, h_3, h_5\};\quad D=\{h_5, h_6\}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3};\quad p(B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}\\ p(B/A)=\dfrac{p(B \cap A)}{p(A)}=\dfrac{1/6}{1/3}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \begin{array}{l} p(B) \neq p(B/A) \Rightarrow\\ \quad\Rightarrow A \text{ y } B \text{ sucesos dependientes;}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};\ \ p(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \\ p(D/C)=\frac{p(D\cap C)}{p(C)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} p(D)=p(D/C) \Rightarrow \\ \Rightarrow C \text{ y } D \text{ sucesos independientes.} \end{array}$$

15.8. *Se dispone de dos cajas iguales, contenedoras de dos bolas blancas, tres rojas y cuatro negras, la primera, y de tres blancas, cuatro rojas y cinco negras, la segunda. Se toma, al azar, una bola de cada una de las cajas. ¿Qué probabilidad hay de que se hayan conseguido del mismo color?*

El suceso A="obtener par del mismo color" puede producirse si se verifica uno de estos tres:

$$\left.\begin{array}{l} B=\text{obtener par blanco} \\ R=\text{obtener par rojo} \\ N=\text{obtener par negro} \end{array}\right\} A=B\cup R\cup N$$

Los sucesos B, R y N son incompatibles (1).

De otro lado, para que se produzca el suceso B han de realizarse los sucesos

$$\left.\begin{array}{l} b_1=\text{obtener bola blanca de la primera caja, y} \\ b_2=\text{obtener bola blanca de la segunda caja} \end{array}\right\} B=b_1\cap b_2$$

De igual manera: $R=r_1\cap r_2$; $N=n_1\cap n_2$.

Los sucesos b_2 y b_1, r_1 y r_2, n_1 y n_2 son sucesos independientes (2).

Componiendo los sucesos analizados, resulta:

$$A=(b_1\cap b_2)\cup(r_1\cap r_2)\cup(n_1\cap n_2)$$

La probabilidad pedida, teniendo en cuenta las observaciones (1) y (2), es:

$$p(A)=p(b_1)\cdot p(b_2)+p(r_1)\cdot p(r_2)+p(n_1)\cdot p(n_2)$$
$$p(A)=2/9\cdot 3/12+3/9\cdot 4/12+4/9\cdot 5/12=19/54$$

15.9. *Admítase que la probabilidad de que un hijo sea niño o niña es la misma. Supuesto esto, ¿qué probabilidad hay de que una familia con cuatro hijos tenga, al menos, un varón?*

$\bar{A}$=tener cero varones=tener cuatro niñas.

$$\bar{A}=♀\cap ♀\cap ♀\cap ♀;\ \ p(\bar{A})=\left(\frac{1}{2}\right)^4;\ \ p(A)=1-p(\bar{A})=1-\left(\frac{1}{2}\right)^4=0{,}93$$

15.10. *Se tiene una batería de cinco urnas opacas, contenedoras de bolas iguales, según estos datos:*

Urna A=cuatro bolas blancas.
Urna B=tres bolas blancas y una negra.
Urna C=dos bolas blancas y dos negras.
Urna D=una blanca y tres negras.
Urna E=cuatro bolas negras.

Con los ojos vendados, se toma una bola de las urnas, advirtiéndose, luego de la extracción, que se trata de una bola negra. ¿Cuáles son las probabilidades de que proceda de cada una de las cinco urnas?

Las probabilidades de que proceda de cada una de las cinco urnas son:

$$p(A)=p(B)=p(C)=p(D)=p(E)=1/5$$

Las verosimilitudes respectivas son:

$$p(N/A)=0/4; \quad p(N/B)=1/4; \quad p(N/C)=2/4; \quad p(N/D)=3/4; \quad p(N/E)=1$$

Según el teorema de Bayes, las probabilidades de que, siendo bola negra, proceda de cada una de las urnas son:

$$p(A/N)=\frac{1/5\cdot 0}{1/5\cdot(0+1/4+2/4+3/4+1)}=1; \quad p(B/N)=1/10; \quad p(C/N)=2/10$$

$$p(D/N)=\frac{1/5\cdot 3/4}{1/5\cdot(0+1/4+2/4+3/4+1)}=3/10 \quad p(E/N)=4/10$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

15.11. En una baraja de cuarenta cartas, ¿cuál es la probabilidad de que un grupo de cinco cartas contenga dos ases? ¿Cuál de que contenga, al menos, dos ases?

15.12. Siendo A y B dos sucesos del muestral H, sabiendo que $A \subset B$, justifíquese:

a) $A \cap B=A$; b) $A \cup B=B$; c) $\bar{B} \subset \bar{A}$; d) $\bar{A} \cup B=H$; e) $A \cap \bar{B}=\varnothing$.

15.13. De una bolsa que contiene dos bolas azules y tres rojas, se extraen simultáneamente dos bolas. ¿Cuáles son los sucesos que compone el suceso A="haber extraído, al menos, una bola roja"?

15.14. Determínense los sucesos elementales del espacio muestral determinado por la siguiente experiencia aleatoria: "Extraer al azar dos bolas de una urna que contiene tres bolas negras y dos bolas blancas".

15.15. En familias con tres hijos se ha hecho el análisis de la distribución por sexos de los hijos. Dígase cuáles son los elementos del suceso C="el hijo mayor es varón" y los del D="los dos hijos pequeños son varones".

15.16. Siendo A y B sucesos del espacio muestral H, se conocen las siguientes probabilidades: $p(A)=0{,}7$; $p(B)=0{,}6$; $p(A \cup B)-p(A \cap B)=0{,}3$. Calcúlense $p(A \cup B)$ y $p(A \cap B)$.

15.17. Justifíquese: $[(A \cup B=A \cup C) \wedge (A \cap B=A \cap C)] \Rightarrow B=C$.

15.18. Demuéstrese que en el álgebra de Boole de los sucesos, todo suceso tiene contrario único. Sugerencia: plantéese una demostración al absurdo.

15.19. Justifíquese la ley de De Morgan del álgebra de sucesos.

15.20. Sea la experiencia que consiste en volver una ficha de las veintiocho de un dominó y leer el número de puntos que resulta.

a) Establézcase el espacio muestral H, con sus trece sucesos elementales.

b) ¿De cuántos sucesos consta el álgebra de $P(H)$?

c) Denotando h_i el suceso "destapar y leer una ficha con i puntos, simbolícense o descríbanse los siguientes sucesos:

A $=h_{13}$; h_0; $\{h_0, h_1, h_2, \ldots, h_6\}$; $h_5 \cup h_{10}$
B = volver y leer una ficha, al menos, de diez puntos
C = consígase ficha, múltiplo de 6
D $=\overline{h_6 \cup h_{12}}$
E $=h_4 \cap h_3$.

15.21. En la misma categoría de pruebas del ejercicio anterior, descríbanse los siguientes sucesos:

$$\bar{h}_4 \cup \bar{h}_6; \quad \bar{h}_4 \cap \bar{h}_6; \quad \overline{h_2 \cup \bar{h}_4}$$

15.22. Se lanzan dos dados homogéneos al aire. Sea el suceso A = obtener un número de puntos, múltiplo de 2, y el suceso B = obtener, al menos, un 4. ¿En qué consisten los siguientes sucesos?:

$$A \cup B; \quad A \cap B; \quad \bar{A} \cup (A \cap \bar{B}).$$

15.23. Simplifíquese $(B \cap \bar{A}) \cup A$; $\quad (A \cap C) \cup (\overline{B \cap C})$; $\quad A \cup (A \cup [A \cup (B \cap \bar{A})])$

15.24. Se lanzan al aire una peseta y un duro. Hállese la probabilidad de obtener, al menos, una cara.

15.25. Se lanza una moneda homogénea al aire cinco veces consecutivas. Determínese la probabilidad de que se obtenga, al menos, cuatro veces cara.

15.26. En una bolsa hay diez bolas iguales, marcadas del 1 al 10. Calcúlese de que se extraigan por orden natural de numeración: *a)* sin reemplazamiento; *b)* con reemplazamiento (= volviendo a meter, cada vez, la bola).

15.27. Una urna contiene tres bolas negras y dos blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos bolas, extraídas al azar, sean ambas negras?

15.28. ¿Qué probabilidad hay de conseguir un número que empiece por 4 de todos los de seis cifras que se pueden formar con los guarismos 4, 4, 4, 3, 0, 0?

15.29. Tres jugadores, *A*, *B* y *C* lanzan una moneda homogénea al aire, en ese orden, continuando el juego hasta que uno de ellos consiga obtener cara. ¿Cuál es la probabilidad de ganar que tiene cada uno de los tres jugadores?

15.30. En una clase hay treinta alumnos de la misma edad. ¿Qué probabilidad hay de encontrar dos compañeros que cumplan años el mismo día?

15.31. Justifíquese que el teorema de la probabilidad total para tres sucesos, toma la forma

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C).$$

15.32. Hállese la probabilidad de conseguir trío de ases al sacar un paquete de cinco cartas de una baraja de cuarenta naipes.

15.33. De una caja de tanteos que contiene tres fichas rojas y cinco verdes, se sacan sucesivamente dos fichas. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda verde, en el supuesto de que

a) no se vuelva la primera a la caja;
b) haya reemplazamiento?

15.34. Se propone a un equipo de tres alumnos la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que lo resuelva el primero es 1/2; la de que lo haga el segundo, 1/3 y 1/4 la probabilidad de que lo consiga resolver el tercero. ¿Cuál es la probabilidad de que resuelva el problema el equipo?

15.35. Una compañía de seguros de vida estima que la probabilidad de que una mujer sana, de veintiún años hoy, alcance los setenta años de edad es 0,8; para un hombre, en las mismas condiciones, se considera la probabilidad de 0,7.

a) Determínese la probabilidad de que en un matrimonio, alcancen ambos los setenta años de edad.
b) Calcúlese la probabilidad de que ambos hayan fallecido.
c) Hállense las probabilidades de que a los setenta años, ella esté viuda o él esté viudo.

15.36. La precisión de un rifle se estima en 0,992. Un tirador tiene como media de sus marcas 990 dianas por mil disparos. ¿Qué probabilidad hay de que hombre y arma hagan dos dianas, al menos, de tres tiros?

15.37. En el escrutinio de los nueve votos (ninguno puede ser "blanco") de un consejo de administración para nombrar un determinado presidente, las primeras cuatro extracciones han resultado ser positivas. ¿Qué probabilidad hay de que al final esa persona sea elegida por unanimidad?

15.38. Hay un cuento de un famoso autor en que se describe una situación análoga a la que se plantea a continuación: En un club de asesinos se escoge al que ha de llevar a cabo el crimen del siguiente modo: sobre una mesa hay tres montones de diez cartas, ocho cartas y seis cartas, en las cuales hay cuatro, tres y una "espadas", respectivamente. Al tomar una carta de uno de los tres montones, si sale "espada", queda designado el ejecutor. ¿Qué probabilidad hay de que salga designado el primero de los socios que prueba "suerte"?

15.39. En una caja hay cinco cartones, numerados del 1 al 5. Se pide:

a) probabilidad de que al extraer dos cartones, sean de la misma paridad;
b) probabilidad de que al extraer dos cartones sean de distinta paridad;
c) probabilidad de que al sacar dos cartones, diez veces consecutivas, reintegrándolos a la caja cada vez, se obtengan, alternativamente, de la misma paridad y de distinta paridad.

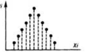
15.40. En una rifa hay todos los números del 0000 al 9999. Determínese la probabilidad de que obtenga el premio alguno de los números formados por tres cifras distintas.

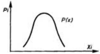
16

Distribuciones y poblaciones aleatorias. Distribuciones bidimensionales. Regresión lineal. Correlación

Espacio probabilístico $[P(H), p]$, formado sobre el muestral $H=\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$

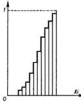
Función de *probabilidad* (variables discretas) / *densidad* (variables continuas) ; $\begin{array}{l} P(H) \xrightarrow{p} R \\ h_i \longrightarrow p(h_i)=p_i \end{array}$

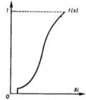




Función de distribución (cada valor acumula a su probabilidad la de todos los anteriores)

$$\begin{array}{l} P(H) \xrightarrow{f} R \\ h_i \longrightarrow f(h_i)=p(h \leqslant h_i) \end{array}$$





Media de una distribución:

$$\mu = \sum_{1}^{k} x_i p_i$$

Varianza de una distribución:

$$\sigma^2 = \sum_{1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i$$

Desviación típica de una distribución:

$$\sigma = +\sqrt{\sum_{1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i}$$

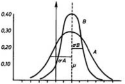
Distribución binomial

Función de probabilidad: $p(h_i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$; $p+q=1$.

Media: $\mu = n \cdot p$.
Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

Distribución normal

Función de densidad: $y = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

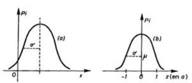


1. Las clases de distribución son puntuales y, por tanto, infinitas, como lo es n.
2. La curva normal es doblemente asintótica con el eje de abscisas.
3. El intervalo total o recorrido de la variable es limitado.
4. La función posee un máximo que se corresponde con los valores coincidentes de la moda, mediana y media.
5. La curva es simétrica, respecto de la ordenada del máximo.
6. la función posee dos puntos de inflexión simétricos, respecto de la ordenada media.
7. La desviación típica viene medida por el segmento $x_i - x_\mu$, diferencia de abscisas de una inflexión y la media.
8. Su coeficiente de asimetría es nulo, como corresponde a la forma de la curva.

Una distribución normal de media μ y desviación típica σ se simboliza $N(\mu, \sigma)$.

Tipificación de la variable

Se hace $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, y, entonces, la función de densidad queda:



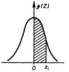
$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

En una distribución normal tipificada la media es 0, y la desviación típica, 1. O sea: $N(0, 1)$.

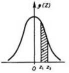
Las $f(x)$ o las $\varphi(x)$ de la función de densidad de una distribución normal no son probabilidades. La probabilidad de que la variable tome valores comprendidos entre a y b viene dada por

$$p(a \leqslant x_i \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

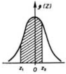
o sea, por las áreas determinadas por el eje de abscisas, la curva y las ordenadas de los valores extremos a y b. Obsérvese cómo se calculan áreas-probabilidad, según su situación:



$p(0 \leqslant z \leqslant z_1) = Z_1$

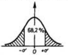


$p(z_1 \leqslant z \leqslant z_2) =$
$= p(0 \leqslant z \leqslant z_2) -$
$- p(0 \leqslant z \leqslant z_1) =$
$= Z_2 - Z_1$

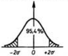


$p(z_1 \leqslant z \leqslant z_2) =$
$= p(0 \leqslant z \leqslant z_2) +$
$+ p(0 \leqslant z \leqslant z_1) =$
$= Z_2 + Z_1$

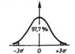
La distribución de los individuos en una población normal es:



El 68,2 por 100 de los individuos están comprendidos en $(-\sigma, +\sigma)$.

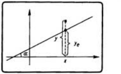


El 95,4 por 100 de los individuos están comprendidos en $(-2\sigma, +2\sigma)$.

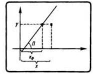


El 99,7 por 100 de los individuos están comprendidos en $(-3\sigma, +3\sigma)$.

Variables bidimensionales. Regresión lineal. Mínimos cuadráticos



Regresión de y sobre x
Desviación: $d = y - y_e$
Condición: Σd^2 mínima
$\boxed{y_e = ax + b}$, con
I. $\Sigma y = N \cdot b + a \cdot \Sigma x$
II. $\Sigma xy = b \cdot \Sigma x + a \cdot \Sigma x^2$



Regresión de x sobre y
Desviación: $d' = x - x_e$
Condición: $\Sigma d'^2$ mínima
$\boxed{x_e = a'y + b'}$, con
I. $\Sigma x = N \cdot b' + a' \cdot \Sigma y$
II. $\Sigma xy = b' \cdot \Sigma y + a' \cdot \Sigma y^2$

Coeficiente de correlación lineal

Mide la mayor o menor dependencia entre los dos caracteres.

$$r = \sqrt{a \cdot a'} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}}.$$

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \leqslant \operatorname{tg} \beta \Rightarrow r \leqslant 1.$$

0	Débil ——— Fuerte	1

Independencia aleatoria (rectas de regresión perpendiculares)

dependencia aleatoria

Dependencia funcional (las rectas de regresión coinciden)

Si α y β son mayores que 90°, se escoge para r el signo $-$ del doble $\pm\sqrt{\ }$, y se dice que existe *correlación inversa*; si α y β son menores de 90°, se toma el signo $+$ del doble $\pm\sqrt{\ }$, lo que indica que es *correlación directa*.

Otras expresiones para r son:

$$r=\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{N\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y};\quad \bar{x} \text{ e } \bar{y}, \text{ medias de los dos caracteres.}$$

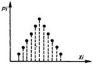
$$\text{Covarianza}=\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{N}\quad ;\quad r=\frac{\text{covarianza}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}.$$

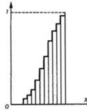
$$r=\frac{N\cdot\Sigma xy-\Sigma x\cdot\Sigma y}{\sqrt{(N\cdot\Sigma x^2-\Sigma^2x)(N\cdot\Sigma y^2-\Sigma^2y)}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

16.1. *Sea la categoría de pruebas "lanzar dos dados sobre la mesa y ver la suma de puntos conseguidos". Establézcanse las tablas de valores y las representaciones de sus funciones de probabilidad y de distribución. Luego, calcúlense la media y la desviación típica de la distribución.*

	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
f	P_i ac.	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1





$\mu=2\cdot 1/36+3\cdot 2/36+4\cdot 3/36+\ldots+12\cdot 1/36=7.$

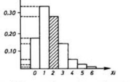
$\sigma=\sqrt{(2-7)^2\cdot 1/36+(3-7)^2\cdot 2/36+\ldots+(12-7)^2\cdot 1/36}=\sqrt{35}/6.$

16.2. *¿Cuál es la probabilidad de que al tirar seis veces al aire una moneda trucada (probabilidad de que salga cara, 1/4) se obtengan dos caras?*

$p=\frac{1}{4};\ q=\frac{3}{4};\ n=6;\ i=2.$

$p(2\text{ caras})=\binom{n}{i}p^i q^{n-i}=$

$=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4=0{,}29.$



16.3. *En la categoría de pruebas del ejercicio anterior, ¿cuál es la probabilidad de que se obtengan no menos de dos ni más de cinco caras?*

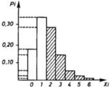
$S=(\text{dos caras})\cup(\text{tres caras})\cup(\text{cuatro caras})\cup(\text{cinco caras}).$

$p(S)=p(2c)+p(3c)+p(4c)+p(5c).$

$p(S)=\sum_{i=2}^{i=5}\binom{6}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{6-i}.$

$p(S)=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^4+\binom{6}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3+$

$+\binom{6}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^2+\binom{6}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^1.$



En lugar de hacer esos cálculos engorrosos, basta ir a las tablas de la distribución binomial, y allí se encuentra, para $n=6$, en la columna de $p=\frac{1}{4}=0{,}25$, para $i=2,\ 3,\ 4,\ 5$, los siguientes valores ya calculados:

$$p(S)=0{,}2966+0{,}1318+0{,}0330+0{,}0044=0{,}4658$$

16.4. *Calcúlense la media y la desviación típica de la distribución binomial de los dos ejercicios anteriores.*

$$\mu=n\cdot p=6\cdot\frac{1}{4}=1{,}5; \qquad \sigma=+\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

16.5. *Al verificar la calidad de producción de una serie de dos mil piezas, las cuales llevan tres soldaduras cada una, se han encontrado los siguientes defectos:*

Número de soldaduras defectuosas.	x_i	0	1	2	3
Número de piezas	n_i	844	840	281	35

Establézcase la distribución binomial ajustada a los datos reseñados y dígase qué número de piezas defectuosas de cada clase cabe esperar en las series de producción.

La media de la distribución es: $\bar{x}=\frac{1}{N}\,\Sigma x_i n_i=0{,}7535.$

Como la media de una distribución binomial es $\mu=n\cdot p$,

$$0{,}7535=3\cdot p \Rightarrow p=0{,}25 \Rightarrow q=0{,}75$$

$$1=\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\,0{,}25^i\cdot 0{,}75^{3-i}$$

Se ha puesto 1, porque la suma total de todos los términos es la probabilidad del suceso seguro.

Defectos x_i	*Probabilidad* p_i	*Número de piezas defectuosas* $p_i\cdot N$	
0	0,4219	843,8	42,2%
1	0,4219	843,8	42,2%
2	0,1406	281,2	14,0%
3	0,0156	31,2	1,6%

16.6. *Determínese la probabilidad de que la variable tome valores comprendidos entre 32 y 40, en una distribución N(50, 5).*

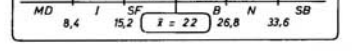
En primer lugar, se tipifica la variable x a z:

$$z=\frac{x-50}{5}\begin{cases} x_1=32 \Rightarrow z_1=-3{,}6 \\ x_2=40 \Rightarrow z_2=-2\end{cases}$$

$$p(32\leqslant x\leqslant 40)=p(-3{,}6\leqslant z\leqslant -2)=p(-3{,}6\leqslant z\leqslant 0)-p(-2\leqslant z\leqslant 0)=$$
$$=0{,}4998-0{,}4772=0{,}0226$$

Valores tomados de la tabla de áreas de la distribución normal.

16.7. *En un curso de doscientos veinte alumnos, una prueba objetiva de cuarenta preguntas ha dado de media de aciertos, $\bar{x}=22$, y la desviación típica de la distribución ha resultado ser $\sigma=6{,}8$. Admitiendo que la distribución es normal, y usando las categorías de evaluación "muy deficiente", "insuficiente", "suficiente", "bien", "notable" y "sobresaliente", dígase:* a), *cuántos alumnos no* *han llegado al suficiente;* b), *la calificación que le corresponde a un alumno que consiguió veintisiete aciertos.*



a) $\frac{0,318}{2} \cdot 220 = 35$ alumnos.

b) 27 aciertos es notable.

16.8. *En cien partos de madres diabéticas se ha determinado el factor K de la madre y el Z del recién nacido. Codificados los resultados a números relativos y hecho el recuento, he aquí la tabla conseguida:*

		Factor k										
	y \ x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	Σn
Factor Z	-2	1	2	2								5
	-1		3	8	9							20
	0			1	10	32	10	5		2		60
	1				1	1	6	2				10
	2						1	3			1	5
	Σn-	-1	5	11	20	33	17	10	0	2	1	100

Calcúlense las rectas de regresión de y sobre x y de x sobre y.

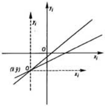
Como las rectas de regresión tienen por ecuaciones normales las que aparecen en la página 270, se preparan las columnas de cálculo Σy, Σy^2, Σx, Σx^2, Σxy.

		Factor k												
	y \ x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	n_y	$\Sigma y = n_y y_i$	$\Sigma y = n_y y_i^2$	$\Sigma xy = \Sigma n x_i y_i$
	-2	1 8	2 12	2 8								5	-10	20	28
	-1		3 9	8 16	9 9							20	-20	20	34
Factor Z	0			1 0	10 0	32 0	10 0	5 0		2 0		60	0	0	0
	1				1 -1	1 0	6 6	2 4				10	10	10	9
	2						1 2	3 12			1 10	5	10	20	24
	n_x	1	5	11	20	33	17	10		2	1	100	-10	70	95
$\Sigma x = n_x x_i$		-4	-15	-22	-20	0	17	20		8	5	-11	Σ		
$\Sigma x = n_x x_i^2$		16	45	44	20	0	17	40		32	25	239			
$\Sigma xy = \Sigma n x_i y_i$		8	21	24	8	0	8	16		0	10	95			

Nota. El número superior de cada casilla es la frecuencia de la clase bivalente respectiva; el inferior es el producto nx_iy_i.

Sustituyendo los valores conseguidos:

Recta de regresión de y sobre x	*Recta de regresión de x sobre y*
I $\quad -10=100b+a(-11)$	I $\quad -11=100b'+a'(-10)$
II $\quad 95=b(-11)+a\cdot 239$	II $\quad 95=b'(-10)+a'\cdot 70$
$a=\ 0{,}40$	$a'=1{,}36$
$b=-0{,}058$	$b'=0{,}02$



Así, pues, la recta de regresión de y sobre x tiene por ecuación

$$y_c=0{,}40x-0{,}058$$

y la de x sobre y es

$$y=\frac{1}{a'}\,x_c-\frac{b'}{a'};\quad y=0{,}78\,x_c-0{,}014$$

Las dos rectas calculadas son las que se dibujan:

16.9. *Calcúlese el coeficiente de correlación de la regresión anterior, usando las pendientes de las rectas.*

$$r=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}=\sqrt{\frac{0{,}40}{0{,}78}}=0{,}73$$

16.10. *Compruébese el valor anterior, utilizando la fórmula última que se escribe en el recordatorio teórico, y usando los cálculos tabulados en la tabla que se preparó en el ejercicio* 16.8:

$$r=\frac{100\times 95-(-11)\times(-10)}{\sqrt{(100\times 239-(-11)^2)\,(100\times 70-(-10)^2)}}=0{,}73$$

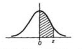
DISTRIBUCION BINOMIAL

Valores hasta $n = 10$ de $\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$, para distintos valores de p

		p									
n	i	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,7100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
	1	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1562
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0071	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0004	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1562
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1868	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0702	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1002	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0312
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2065	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0403	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0312
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389					
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087					
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010

Areas limitadas en una curva normal tipificada entre el eje de las ordenadas y las ordenadas levantadas por distintos valores de z.

(De *Statistic*, por M. R. Spiegel. Schaum Publishing Company. Nueva York, 1961.)



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1592	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4039	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

PROBLEMAS PROPUESTOS

16.11. Sea la categoría de pruebas "levantar una ficha de dominó y ver la suma de puntos conseguida", en las veintiocho de que consta el juego. Hágase el cuadro de valores y la representación gráfica de las funciones de probabilidad y de distribución correspondientes.

16.12. Calcúlense la media y la desviación típica de la distribución del ejercicio anterior.

16.13. La probabilidad de un suceso A es 0,4. ¿Qué probabilidad hay de que ese suceso se verifique tres veces en cinco ensayos?

16.14. ¿Qué probabilidad hay de que se obtengan al menos nueve caras, al lanzar diez veces una moneda homogénea al aire? Se sugiere determinar previamente la probabilidad del suceso contrario?

16.15. Hállese la probabilidad de que, al lanzar un dado cinco veces se obtenga:

a) dos veces el 4;
b) al menos, dos veces el 4;
c) a lo más, dos veces el 4.

16.16. En una fábrica de transistores de germanio el 1 por 100 de la producción es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de veinte transistores haya alguno defectuoso?

16.17. ¿Qué proporción cabe esperar de entre todas las familias con seis hijos, de aquellas que tengan tres, cuatro o cinco varones?

16.18. Se estima que el 25 por 100 de un tipo de mosca tropical presenta atrofiadas las alas. Estudiando un elevado número de muestras de cinco de esos dípteros, ¿en qué proporción se encontrarán muestras con menos de tres moscas de alas atrofiadas?

16.19. La probabilidad de que el jugador de ajedrez A gane al B se estima en 0,6. Si juegan seis partidas en la temporada, ¿cuál es la probabilidad de que A gane a B?; ¿cuál de que le gane por cinco partidas a una? (No se considera el resultado "tablas".)

16.20. En cien cultivos bacteriológicos en los que se pretende controlar la posible presencia simultánea de cinco clases de bacterias, se han conseguido estos resultados:

número de clases de bacterias	x_i	0	1	2	3	4	5
número de cultivos	n_i	0	8	21	32	31	8

Hágase el ajuste de estas muestras a una distribución binomial.

16.21. En la distribución $N(14, 3)$, calcúlense:

$$p(x \leqslant 20); \quad p(x \geqslant 7); \quad p(8 \leqslant x \leqslant 15); \quad p(10 \leqslant x \leqslant 14)$$

16.22. El espesor del dieléctrico de una pieza condensadora de una producción en serie oscila entre valores cuya media es 2,5 mm y cuya desviación típica vale 0,05 mm. Encuéntrese la probabilidad de hallar piezas de espesor comprendido entre 2,4 y 2,6 mm.

16.23. A un grupo de doscientas personas se les pasa una prueba objetiva de selección. Corregida ésta, se ha visto que la media es de 60 puntos y la desviación típica, de 6 puntos. Supuesta una distribución normal, díganse cuántos examinandos han conseguido una nota inferior a 70 puntos.

16.24. Con los datos del ejercicio anterior, decídanse cuántas personas han puntuado entre 40 y 30 puntos.

16.25. Respecto del mismo planteamiento anterior, encuéntrese la nota por debajo de la cual está el 75 por 100 de los examinandos.

16.26. El departamento de verificación de una factoría de aparatos eléctricos toma para control de calidad quinientas piezas de un determinado diseño y mide su espesor en milímetros, habiendo resultado los siguientes números, agrupados en once clases. Hágase el ajuste a una distribución normal.

Las cabeceras de la tabla preparada sugieren el camino a seguir.

Clase $x_k - x_{k+1}$	*Marca de clase* (x_i)	*Frecuencia* (n_i)	*Desviaciones*, $x-\bar{x}$	$\frac{x-\bar{x}}{\sigma}$	*Area* $z\%$	Δz	n_i teór.
1,725-1,775	1,75	5					
1,775-1,825	1,80	25					
1,825-1,875	1,85	35					
1,875-1,925	1,90	55					
1,925-1,975	1,95	79					
1,975-2,025	2,00	100					
2,025-2,075	2,05	85					
2,075-2,125	2,10	50					
2,125-2,175	2,15	45					
2,175-2,225	2,20	11					
2,225-2,275	2,25	10					
		$\Sigma n_i = 500$					
$\bar{x} =$	$\sigma =$	$N = 500$					

16.27. En una serie de cien síntesis de 5 microgramos de un compuesto orgánico, la temperatura y acidez (pH) de las reacciones han sido las siguientes:

t °C	pH	t °C	pH	t °C	pH	t °C	pH	t °C	pH
10	9	20	9	−20	5	−10	7	0	7
40	7	0	7	10	7	20	12	−20	2
−10	5	−20	7	−10	7	0	7	0	9
0	7	−10	5	20	9	−20	5	−10	7
30	7	10	9	0	7	10	9	20	12
10	9	0	7	30	7	−10	7	0	7
40	12	−30	5	−10	5	30	7	−20	5
−10	5	50	12	10	9	−30	2	10	9
0	7	−10	7	0	7	30	9	0	7
30	7	20	12	−20	2	−10	5	0	7
10	9	0	7	10	7	10	12	−30	2
50	12	−20	5	−10	7	0	7	30	9
−40	2	10	9	20	12	−20	5	−10	7
30	9	−10	9	0	7	10	7	20	7
−10	5	0	7	−20	7	−10	7	0	7
10	12	−30	2	10	9	20	9	−20	5
0	7	30	9	10	9	0	7	10	7
−20	5	−10	7	0	7	−10	5	−10	7
10	7	20	7	−30	5	−10	5	20	12
−10	7	0	7	40	12	10	9	0	7

Hágase el recuento y dispóngase una tabla de doble entrada para tabular esos números.

16.28. Calcúlense las rectas de regresión del ejercicio planteado en el número anterior.

16.29. Hágase sobre papel milimetrado 11×5 mm la representación de las rectas de regresión que se han calculado en el número 28.

16.30. Calcúlese el coeficiente de correlación de la distribución que se viene analizando,

a) mediante las pendientes de las rectas de regresión;
b) usando los cálculos tabulados, según la fórmula a la que se hacía referencia en el problema 16.10.

APENDICE

Problemas diversos

1. Un tetraedro $VABC$ tiene por base un triángulo rectángulo en A. $\overline{VB}$ es perpendicular al plano base. Las aristas $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{VB}$ miden, respectivamente, 3, 4 y 5 cm. Sobre $\overline{AB}$, y a una distancia $\overline{BQ}=x$ cm, se toma un punto Q, por el que se traza un plano perpendicular a $\overline{AB}$.

Calcúlese, en función de la distancia x, el área de la sección producida en el tetraedro por este plano, así como el valor de x que hace esa superficie máxima.

2. Determínese el valor de la derivada de la función $f(x)=\left(\dfrac{n}{x}+1\right)^{\frac{1}{2}}$, cuando $x=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}\right)$, siendo n el número de números de cinco cifras no repetidas que se pueden escribir con los guarismos impares.

3. Siendo $z=x+iy$ y $z'=x'+iy'$, la relación $z'=(\bar{z})^{-1}$, define en el plano una transformación entre los afijos de los complejos.

a) Establézcanse las ecuaciones de la transformación.
b) Analícese la clase de transformación que resulta.
c) Encuéntrese la figura transformada de la cónica $y^2=x(1-x)$.

($\bar{z}$ significa conjugado de z)

4. Hállese el valor de $\int_{-1}^{1} m(x+n)^t\,dx$, con los siguientes datos:

$m=$ número de permutaciones sin repetición que pueden hacerse con las letras de la palabra REINA, no pudiendo haber dos consonantes consecutivas;

n es el valor que satisface la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 6 & n \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}=0$

i es tal que $x^4-x^2+3x+i=\dot{\overline{x+1}}$.

5. De los supervivientes de una batalla de siete mil hombres, el 56,5656... por 100 no fuman y el 56,7567567... por 100 no beben. Hállese el número de muertos en la batalla.

6. Dibújese la gráfica de la función $y=x\cdot e^{1/x}$, fijando su cuadro de valores.

7. Dedúzcanse los elementos descriptivos de las cónicas siguientes:

1) $2x^2-2xy+y^2+2x-8y+21=0$; 2) $x^2+y^2-2xy+x-y-6=0$.

8. Determínense el centro y radio de la esfera que tiene su centro en la recta $x=y=z$, y corta ortogonalmente a las esferas $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x+12=0 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

9. Dada una circunferencia de diámetro $AB=2R$, por el extremo B se traza su tangente y por el opuesto, A, una secante cualquiera que corta a la circunferencia en C y a dicha tangente en D. Sobre la cuerda AC se lleva la distancia $CD=AE$. Hállese (y dibújese) el lugar geométrico de los puntos E.

10. Apoyándose en el concepto de integral definida, calcúlense:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$

Indicación: tómese en el primero $f(x)=x$, y en el segundo, $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$; ambas en $[0, 1]$.

11. Siendo $z=1+i$, sea el cuadrilátero $ABCD$, cuyos vértices son los afijos de las cuatro primeras potencias naturales de z. Calcúlense su perímetro y su área.

12. Dados los polinomios $A(x)=x^3-4x^2+5x-2$ y $B(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+k$, determínese el valor de k para que el máximo común divisor de ambos sea de segundo grado. Haciendo uso de ese máximo común divisor, encuéntrense todos los ceros de ambos polinomios.

13. Siendo O el origen de coordenadas, sobre cada punto A del plano se construyen triángulos equiláteros, igualmente orientados, OAA'. Fíjese la transformación geométrica que produce las imágenes A' según el anterior criterio. Luego, hállese el lugar geométrico de los puntos A' correspondientes a los $A\in r\equiv x=2$.

14. Colocadas en orden alfabético todas las permutaciones *a b c d e f g*, se desea saber el lugar que ocupa la permutación *c g a d b f e*.

15. La diferencia de los dos últimos términos de una progresión geométrica es 448, y la diferencia de sus logaritmos en base 32 es 1/5. Calcúlese el número de términos y su razón, siendo 7 el primero.

16. Fórmese la permutación que ocupa el lugar 340 entre todas las que se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6.

17. Se sabe que para un cierto valor de a, una raíz de la ecuación ax^3-3x^2+ $+2x+6=0$ es i^{-66}. Hállense las otras dos raíces.

18. Un polinomio de segundo grado $p(x)$ es tal que $p(0)=4$; $p(-1)=0$; produce los mismos restos al dividirlo por $x-2$ y por $x-1$. Fíjese de qué polinomio se trata y dibújese la gráfica de la función $y=p(x)$. Estúdiense el dominio y recorrido de la función $g(x)=y^{\frac{1}{2}}$.

19. Se hace una retícula de intersecciones equidistantes y ortogonales entre los siete hilos verticales a, b, c, d, e, f, g y los siete horizontales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Calcúlese el número de caminos distintos de menor longitud que llevan del nudo b-1 al nudo e-7.

20. Se consideran en el plano todos los triángulos PAB con dos vértices fijos en $A(1, 0)$ y $B(-1, 0)$. Siendo G el baricentro de cada uno de esos triángulos, hállese la transformación t, tal que $t(P)=G$. Cuando P es un punto de la recta $y=-2x+6$, ¿cuál es el lugar geométrico de G?

21. Hállese la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x-4y+$ $+7=0$, concéntrica con la circunferencia $x^2+y^2-4x+6y-17=0$.

22. Se sabe que el cociente $\dfrac{ax^4+bx+1}{(x-1)^2}$ es un polinomio $p(x)$. Determínese el polinomio dividendo. Represéntese la función $y=p(x)$ y calcúlese el área limitada por esa función y la recta $y+x-1=0$.

23. Dado el sistema
$$\begin{aligned}(k^2-1)x+(k+1)^2y&=k+1\\(k+1)x+(k-1)y&=k+1\end{aligned}$$

a) Discútase y resuélvase en los casos de compatibilidad.

b) Fíjese k para que las ecuaciones del sistema representen rectas paralelas y para que representen rectas perpendiculares.

24. Las rectas r y s pasan por el origen y forman ángulos de $+30^\circ$ y -30°, respectivamente, con la bisectriz del primero y tercer cuadrantes. Escríbanse sus ecuaciones y determínese el área del triángulo que forman con la recta $x+y=1$.

25. Sabiendo que $\log 3=0{,}477121$, calcúlese el $\log A$, siendo
$$A=3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}\ldots}}$$

26. Calcúlense las dos raíces (cuyo producto es -15) de la ecuación:
$$\frac{\log(x^2-K)}{\log(x-2)}-2\log 5=40$$

27. Habiendo perdido un jugador en la primera mano 5 000 pesetas, jugó otras cinco manos más, triplicando la apuesta en cada una. Si perdió todas, salvo la última, ¿ganó o perdió dinero?

28. Dedúzcase el término que tiene mayor coeficiente de desarrollo de $\left(2x+\dfrac{y}{3}\right)^{36}$

29. Constrúyase un triángulo dados: 1) m_a, m_b, C; 2) m_a, m_b, h_c; 3) $2p$, h_a, r_a (radio de la circunferencia exinscrita).

30. Constrúyase un cuadrilátero dados:
1) las diagonales, el ángulo que forman y dos ángulos opuestos;
2) un ángulo, su lado adyacente y las dos diagonales;
3) los cuatro lados y el ángulo formado por dos opuestos.

31. Constrúyase un cuadrado circunscrito a un cuadrilátero dado.

32. Sobre la circunferencia $x^2+y^2=9$ se mueve el punto P. Siendo $A(-3,0)$ y $B(3,0)$, N el punto medio de BP y M el punto medio de AN, encuéntrese el lugar geométrico de M.

33. Sean los complejos $z=x+iy$ y $z'=x'+iy'$; y la relación $z'=2i\cdot z$. Estúdiese la transformación geométrica entre los afijos de los complejos, definida por la relación establecida. Luego, hállese la transformada de la línea $x^2+y^2-2x=0$.

34. Calcúlese $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+p}{n}\right)^{qn}$, siendo $p\in Z^+$ raíz de la ecuación $(x+i)^4=$ $=(x-i)^4$, y $1, a_2, 11, q, \ldots$ progresión aritmética.

35. Un tetraedro regular de 25 cm de arista es hueco y le falta una cara. Se coloca de modo que el vértice opuesto a la cara que falta se apoya en el suelo y se echa 1 litro de agua. Se piden: la altura a la que llega el agua y el volumen de la parte vacía.

36. Dado un rectángulo de lados a y b, por cada uno de sus lados se trazan planos que formen con él ángulos de 45°, obteniéndose así un cuerpo cuyas caras laterales opuestas son trapecios y triángulos, rematados en la parte superior por una línea recta. Calcúlense su área total y su volumen.

37. Dados tres números a, b, c en progresión geométrica, si se aumenta b en 8, dejando a, c invariables se obtiene una progresión aritmética. Si de estos tres últimos números sólo varía c, aumentándolo en 64, se obtiene una geométrica. Calcúlense los tres números a, b y c.

38. Racionalícese la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}-1}$$

39. Siendo $z=x+iy$ y $z'=x'+y'i$, se establece la correspondencia $z'=-3z$. ¿Qué transformación geométrica para los afijos de los complejos define la correspondencia anterior? Si el afijo de z pertenece a la curva $x^2+y^2-2y=0$, ¿cuál es el lugar geométrico del afijo de z'? Dígase la relación de áreas de los recintos limitados por las dos curvas homólogas en la transformación.

40. Constrúyanse las circunferencias tangentes a los dos lados de un ángulo y que pasan por un punto interior al mismo.

41. Dada la función $y=L\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$, determínese:

a) Puntos de corte con el eje de abscisas.
b) Calcúlese su derivada hasta su expresión más sencilla.
c) Hágase la representación gráfica de la función derivada conseguida.

42. Siendo $A(x)=x^4-5x^3-3x^2-5x-$ y $B(x)=x^3-4x^2-9x-4$, resuélvase el sistema $\left.\begin{matrix}A(x)=0\\B(x)=0\end{matrix}\right\}$, calculando el máximo común divisor de $A(x)$ y $B(x)$.

43. Resuélvanse las ecuaciones:

a) $\dfrac{\log 2+\log(11-x^2)}{\log(5-x)}=2;$ *b)* $\log\sqrt{3x+4}+\log 3=1-\dfrac{1}{2}\log(5x+1).$

44. Resuélvase el sistema

$$\left.\begin{array}{l}(x-y)^{\log(x+y)}=10^3\\ x^2+y^2=10^4\end{array}\right\}$$

45. Un operario de una cadena de fabricación en serie cobra 900 pesetas/día. Además, en concepto de primas, se le abonan 50 pesetas por el primer centenar de piezas manipuladas; 100 pesetas por el segundo; 150 pesetas por el tercero, y así sucesivamente. Trabajando a destajo, a un productor se le pagan 300 pesetas por el primer centenar; 400 por el segundo, 500 pesetas por el tercero, etc.

Exprésese el jornal del primer obrero, en pesetas/día, en función del número de centenares de piezas manipuladas. Hágase el mismo cálculo para el que trabaja a destajo. Calcúlese el número de piezas que han manipulado ambos el día que han salido por el mismo jornal.

46. Demuéstrese que: $n(n+2)(5n-1)(5n+1)=\overline{24}$ si $n\in Z$; y si n es un número primo distinto de 2 y 3 $\Rightarrow n^2-1=\dot{\overline{24}}$.

47. Demuéstrense por inducción las siguientes expresiones:

1) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

2) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

3) $(1+2+\ldots+n)^2=1+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n(n+1)}{2}$

4) $1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{1}{6}\cdot n(n+1)\cdot(2n+1)$

48. Los lados de un triángulo están en progresión aritmética, y la suma de sus cuadrados es 116. Sabiendo que su perímetro es 18 cm, se pide:

1) qué tipo de triángulo es;

2) todos sus elementos descriptivos: alturas, medianas, bisectrices y las áreas del triángulo y de sus circunferencias circunscrita, inscrita y exinscritas.

49. Siendo $m-n=k$, justifíquense que son equivalentes (y demuéstrense) las siguientes expresiones:

$$\binom{m}{n}=\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-2}{n-1}+\binom{m-3}{n-1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n-1}{n-1}$$

$$\binom{m}{k}=\binom{m-1}{k}+\binom{m-2}{k-1}+\binom{m-3}{k-2}+\ldots+\binom{m-k}{1}+\binom{m-k-1}{0}$$

50. Pruébese que todos los términos de la sucesión que resulta al intercalar simétricamente el número 48 en el término precedente, partiendo de 49, son cuadrados perfectos.

51. Se da el triángulo ABC. Encuéntrese un punto P, interior al mismo, de manera que los triángulos PAB, PAC y PBC tengan la misma área.

52. Sea C la circunferencia de centro en el origen y radio 2. Considérense los puntos $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$. Siendo $P \in C$, se construye el paralelogramo $ABQP$. Determínese el lugar geométrico de Q cuando P recorre la circunferencia. Hállese también el lugar geométrico del punto M, corte de las diagonales de los paralelogramos.

53. Sean las simetrías centrales de centros $O(0, 0)$; $A(2, 0)$ y $B(5, 3)$. Justifíquese que $P \in \Pi$, siendo $(s_B \circ s_A \circ s_O)(P) = P'''$, el punto medio de PP''' es fijo. Determínese.

54. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo de perímetro 12 dm, con sus lados en progresión aritmética. La altura del prisma tiene doble longitud que el lado mayor de la base. Hállense las dimensiones del prisma, su área y su volumen.

55. El menor ángulo de un pentágono convexo es recto; los demás están con él en progresión aritmética. Hállense las medidas de sus cinco ángulos.

56. Calcúlese el límite de la suma

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\dots\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\dots\right)+$$
$$+\dots+\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{(2^n+1)^2}+\frac{1}{(2^n+1)^3}+\dots\right)+\dots$$

57. Calcúlese:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)+\dots+\frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{x}\right)\right]$$

58. Sabiendo que:

$$z=a+b\cdot i=r(\cos\omega+i\cdot\operatorname{sen}\omega)=r_\omega=r\cdot e^{i\cdot\omega},$$

donde,

$$r=|z|=+\sqrt{a^2+b^2},\qquad \omega=\operatorname{Arg} z,$$

Demuéstrese:

1) $\cos\omega=\dfrac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}$; $\quad\operatorname{sen}\omega=\dfrac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2\cdot i}$

2) $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$

3) $$\begin{cases}\cos\dfrac{2\pi}{n}+\cos\dfrac{4\pi}{n}+\cos\dfrac{6\pi}{n}+\dots+\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n}=-1\\[2mm] \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}+\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{n}+\operatorname{sen}\dfrac{6\pi}{n}+\dots+\operatorname{sen}\dfrac{2(n-1)\pi}{n}=0\end{cases}\qquad(1\neq n\in N)$$

59. Pruébese que todo imaginario puro $z/\ |z|=1$ es de la forma:

$$\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i}=z/\quad x\in R$$

60. Obténgase en forma binómica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{8}{(1-i)^5}$ $\qquad$ *b)* $\sqrt[6]{1-i\sqrt{3}}$ $\qquad$ *c)* $\left(\dfrac{1+3\cdot i}{1-3\cdot i}\right)^{10}$

61. Resuélvanse:

1) $z^2+(i-2)z+3-i=0$; 2) $z^5-2z^4-z^3+6z-4=0$; 3) $\operatorname{sen} x=2$;
4) $\cos x=3$; 5) $\operatorname{tg} y=2\cdot i$

62. Si los afijos de los complejos z_1, z_2, z_3, z_4 forman un cuadrilátero, pruébese que es paralelogramo $\Leftrightarrow z_1-z_2-z_3+z_4=0$.

63. Pruébese que: $(z_1-z_2)(z_1-\bar{z}_2)(\bar{z}_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=a\in R$.

64. Un segmento de longitud constante $2r$ resbala, apoyando sus extremos sobre los ejes de coordenadas. Encuéntrese el lugar geométrico de su punto medio.

65. Un cuadrado de 1 cm de lado es base de una pirámide, una de cuyas aristas laterales, perpendicular al cuadrado-base, mide 3 cm. A una distancia x de la base, paralelamente a ella, se corta la pirámide y se proyecta la sección producida sobre el plano de la base. De esta manera se consigue un prisma del que se pide su área total, en función de x. Determínese, además, el valor de x, para el que esa área total es máxima.

66. La superficie lateral de un barril de altura 12 dm se puede considerar engendrada por el giro alrededor del eje mayor de un arco de la elipse de semiejes 7 dm y 3 dm. Determínese la capacidad de ese barril, en litros.

67. Resuélvanse los sistemas:

a) $\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{y-b}=1$, $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{y-b}=0$ *b)* $\left.\begin{array}{l}\sqrt[x]{x+y}=2\\(x+y)\cdot 3^x=6^y\end{array}\right\}$

68. Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

1.ª $2^{2x+2}+4^{3-x}=257$; 2.ª $\log x=\log 2+2\cdot\log(x-3)$; 3.ª $5^x+5^{x+1}=6$;
4.ª $4^x+2^x=1\,056$; 5.ª $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}=2^y+2^{y+1}+2^{y+2}+2^{y+3}$

6.ª $(\sqrt{2})^{x\sqrt{3}}=2^{x+1}$; 7.ª $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^x=16\,383$

69. Un vértice de un rombo es el punto $M(6, 5)$ y su centro es el $C(4, 3)$. Si el lado mide $\sqrt{10}$ m, calcúlense:

a) Coordenadas de los vértices; *b)* Ecuaciones de los lados;
c) Area del rombo; *d)* Area del círculo inscrito.

70. Dado el haz de rectas $4\lambda x+y-\lambda^2=0$, se pide:
a) Los dos rayos que pasan por el punto $P(1, -3)$.
b) La tangente del ángulo que forman las dos rectas del haz que pasan por el punto $Q(1, 5)$.

71. Dada la circunferencia $(x-2)^2+y^2-1=0$, hállese la ecuación de la circunferencia homotética de ella, con centro en un punto de abscisa 8, respecto del origen como centro de homotecia.

72. Simbolizando $V_{m,n}$ las variaciones sin repetición m-arias de n elementos, analícese la sucesión de números: $V_{3,2}$; $V_{3,4}$; $V_{3,5}$; ...
Escribiendo S_q para la suma de los q primeros términos de la sucesión anterior, analícese la sucesión que forman los números $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$.

73. Sea el conjunto $A=\{a_i\}$, con $i=1, 2, 3, \ldots, 12$. Fórmese un conjunto $B\subset A$, siendo card $(B)=7$, con las siguientes características: *a)* $a_1\in B$ y $a_2\notin B$; *b)* $a_2\in B$ y $a_1\notin B$; *c)* $a_1\notin B$ y $a_2\notin B$; *d)* $(a_1\in B)\veebar(a_2\in B)$.

Díganse cuántos subconjuntos B, distintos, pueden obtenerse en cada uno de los cuatro apartados.

74. Un polinomio $p(x)$ es tal que $p(-2)=1$ y $p(5)=15$. Dígase cuál es el resto de la división de $p(x)$ por $(x+2)\cdot(x-5)$.
Estúdiese y represéntese la función dada por el divisor ensayado, y calcúlese el área limitada por esa función y la recta $2x-y+5=0$.

75. Resuélvase la ecuación $ax^3+\dfrac{b}{c}=0$, en la que:

a=expresión decimal de $0{,}12_{(3}$
b=número de números distintos de siete cifras que se pueden formar con los guarismos 0, 0, 0, 3, 4, 4, 5
c=coeficiente que hace incompatible el sistema $\left.\begin{matrix}9x-cy-7=0\\3x-2y-4=0\end{matrix}\right\}$

76. Calcúlese $A=\sqrt[\log n]{\dfrac{n^3}{r}}\cdot\sqrt[\log n^2]{\dfrac{r}{n}}\cdot\sqrt[\log n]{\dfrac{1}{n^2}}$

siendo $n=a_7$ en la progresión geométrica de $a_1=1\,458$ y $a_5=162$
r=resto de la división $(x^3-x+22):(x+2)$.

77. Las coordenadas del vértice $V(m, n)$ de la parábola $y=-x^2+kx+p$ vienen dadas por los numeradores de las dos fracciones de denominadores lineales en que se descompone la expresión $\dfrac{7x-17}{x^2-5x+6}$. Determínese y represéntese la cónica de que se trata. Luego, justifíquese que es nulo el determinante

$$\begin{vmatrix} m & k & 9 \\ n & p & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

78. Sea la función $y=ax^3+bx^2+cx+2$. Se sabe que sus coeficientes son dígitos naturales, y que $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$ dan el mismo resto al dividirlos por 5. Determínese la función y calcúlese el volumen de la figura que resulta al girar alrededor del eje de abscisas el área limitada por ella, las ordenadas correspondientes a $x=\pm1$ y el propio eje de abscisas.

79. Sobre $A(1, 0)$, para cada punto P del plano, se construyen triángulos equiláteros APP', de manera que $\hat{A}=+60°$. Determínese por sus ecuaciones la transformación geométrica definida.
Cuando P recorre el eje de ordenadas, ¿cuál es el lugar geométrico de P'?
Descompóngase el movimiento en producto de dos simetrías axiales, siendo la primera la que tiene por eje el de abscisas.

80. La altura y radio básico de un cono de revolución miden, respectivamente, 4 cm y 3 cm. Considérense la superficie esférica, S, determinada por el vértice, V, y la circunferencia base. Una homotecia directa de centro V y razón 2, transforma S en S'.
Calcúlese la distancia de V a que corta S' al eje del cono.
Hállese la distancia a la que un plano paralelo a la base ha de cortar al cono para dividir el área lateral en dos partes iguales.

81. Considérese un tetraedro regular de arista a. Se construye el poliedro cuyos vértices son los centros de las caras del tetraedro. Justifíquese que ambos sólidos son homotéticos y fíjense el centro y razón de la homotecia que los relaciona. Luego calcúlese el volumen del segundo cuerpo, en función de a.

82. Sea el dodecaedro regular de arista a. Hállese:
a) el valor del diedro que forman dos caras contiguas;
b) radio de la esfera inscrita al poliedro;
c) área total y volumen del dodecaedro.

83. Sea la semicircunferencia positiva de centro $C(1, 0)$ y radio 1. Desde un punto P, de abscisa x, variable sobre la semicircunferencia, se trazan perpendiculares al eje de abscisas, PM, y a la tangente a la curva en el punto A, diametralmente opuesto al origen, PN.
a) Hállese, en función de x, el volumen V del cuerpo de revolución que resulta al girar el área $OPNA$, alrededor del eje OX;
b) analícese cómo varía la función
b) analícese cómo varía la función siguiente: $y=\frac{3}{2\pi}\cdot V$

84. Sea la función $y=\begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix}$

Hállense:
a) puntos de corte con el eje de abscisas;
b) ecuación de la tangente a la curva en los puntos hallados;
c) área que determinan la curva, la tangente y el eje OY.

85. Calcúlese el área limitada por la curva $y=x\cdot e^x$, la paralela al eje de ordenadas por la abscisa de su mínimo y el eje OX.

86. Un manufacturado está formado por dos piezas, a y b. Se estima en un 0,6 por 100 la probabilidad de que salga defectuosa la pieza a, y en un 0,5 por 100 la de que aparezca algún defecto en la b. Determínese la probabilidad de que el manufacturado no presente defecto de fabricación.

87. El espesor de un dieléctrico de una pieza fabricada en serie oscila entre valores de media 2,45 mm, presentando una desviación típica de 0,04 mm, según una distribución normal. ¿En qué proporción cabe esperar piezas de espesores comprendidos entre 2,3 y 2,4 mm?

88. En una clase con treinta y cinco alumnos, todos nacidos el año 1960, determínese la probabilidad de encontrar, al menos, dos compañeros que hayan nacido el mismo día.

89. Se estima que en un población de un determinado díptero amazónico, el 25 por 100 de insectos presentan élitros. Si se toma un elevado número de muestras de seis dípteros de esa especie, ¿cuál es la probabilidad de encontrar muestras de más de tres individuos sin élitros?

90. Dos tiradores olímpicos de idéntica calidad se enfrentan en siete tiradas de una competición que da vencedor al primero que alcance cuatro puntos, según el siguiente baremo: en cada tirada se adjudica un punto al mayor número de dianas; en caso de empate se repite la tirada.
El jugador A ha superado al B en la segunda tirada, y el B lo ha hecho en la primera y tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que resulte vencedor el primero?

Alhambra